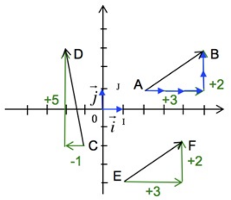
METHODES REPÉRAGE ET VECTEURS

Déterminer les coordonnées d'un vecteur par lecture graphique

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ par lecture graphique :



Pour aller de A vers B, on effectue une translation de 3 carreaux vers la droite (+3) et une translation de 2 carreaux vers le haut (+2). On trace ainsi un « chemin » avec les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ mis bout à bout reliant l'origine et l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Ainsi $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont donc $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. De même, $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées d'un vecteur par calcul

Retrouver les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ par calcul avec :
A $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, B $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, C $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, D $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, E $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ et F $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -2-(-1) \\ 3-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ -2-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Appliquer les formules sur les coordonnées de vecteurs

En prenant les données de la méthode précédente, calculer les coordonnées des vecteurs $3\overrightarrow{AB}$, $4\overrightarrow{CD}$ et $3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CD}$.

On a : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
$3\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3\times3 \\ 3\times2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$, $4\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 4\times(-1) \\ 4\times5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 20 \end{pmatrix}$
$3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 9-(-4) \\ 6-20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -14 \end{pmatrix}$

Calculer les coordonnées d'un point défini par une égalité vectorielle

Dans un repère, soit les points A$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, C$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
On a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 1-x_D \\ -2-y_D \end{pmatrix}$
Donc $1 - x_D = -5$ et $-2 - y_D = 1$
Soit $x_D = 6$ et $y_D = -3$.

Vérifier si deux vecteurs sont colinéaires

Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-12\\21\end{pmatrix}$

b. $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}15\\7\end{pmatrix}$

a. $4 \times 21 - (-7) \times (-12) = 84 - 84 = 0$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

b. $5 \times (-7) - (-2) \times (15) = -35 + 30 = -5 \neq 0$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas colinéaires

Remarque : Les calculs précédents reviennent à calculer le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Appliquer la colinéarité

On considère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Soit $A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}$ et $E\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$.

a. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

b. Démontrer que les points E, B et D sont alignés.

a. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}3-(-1)\\2-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}6-(-2)\\-1-(-3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$.
Comme les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont proportionnelles, on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. Les droites (AB) et (CD) sont donc parallèles.

b. $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix}3-5\\2-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix}6-5\\-1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.
$\det(\overrightarrow{EB}\,;\,\overrightarrow{ED}) = \begin{vmatrix}-2 & 1\\2 & -1\end{vmatrix} = -2\times(-1) - 2\times 1 = 0$

c. Les coordonnées de $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{ED}$ vérifient le critère de colinéarité des vecteurs.

d. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires.

e. Les points E, B et D sont donc alignés.

Calculer une distance dans un repère orthonormé

Soit $A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ deux points dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
La distance AB (ou norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$) est égale à :
$AB = \sqrt{(2-3)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$