Version 240909

2024/2025

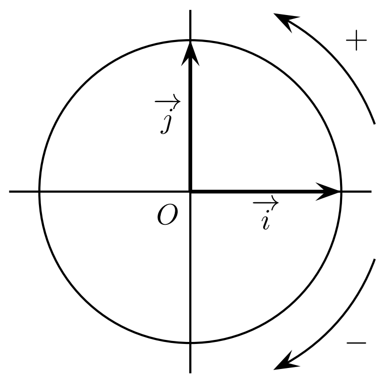
Fonctions trigonométriques

I Cercle trigonométrique : mesure des angles orientés.

Définition

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1 sur lequel on a choisit :

- un **sens direct**, ou sens positif, sens inverse des aiguilles d'une montre
- un **sens indirect**, ou sens négatif, sens des aiguilles d'une montre.



Sur le cercle trigonométrique, la mesure en radians d'un angle orienté est égale à la mesure algébrique (avec un signe) de l'arc intercepté

Exemple

Un tour complet, soit 360°, mesure 2π radians.
$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ radians (1/4 de tour).
On parle d'**une** mesure de l'angle orienté car il en possède une infinité :
L'angle orienté $(\vec{i}\,;\vec{j})$ mesure $-\frac{\pi}{2}$ radians. $\frac{\pi}{2}$ radians, $\frac{\pi}{2}+2\pi = \frac{5\pi}{2}$ rad, $\frac{5\pi}{2}+2\pi = \frac{9\pi}{2}$ rad,...,
$\frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$ rad,...

Exemple

Compléter :

Degrés	0	30	45	60	90	135	180	360
Radians	0							

Degrés	1		-15	20	270		
Radians		1				$\frac{167\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{3}$

Définition

La **mesure principale** d'un angle orienté est la mesure de cet angle appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

Exemple

L'angle orienté $(\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{i})$ a plusieurs mesures : $\dfrac{3\pi}{2}$; $-\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{3\pi}{2}+2\pi$...
Sa mesure principale est $-\dfrac{\pi}{2}$

Exemple

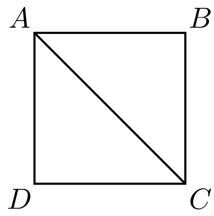
Déterminer la mesure principale des angles orienté suivants :

a. $\dfrac{7\pi}{3}$ b. $-\dfrac{11\pi}{6}$ c. $\dfrac{9\pi}{8}$ d. $\dfrac{15\pi}{2}$ e. $\dfrac{26\pi}{4}$ f. $-\dfrac{13\pi}{5}$

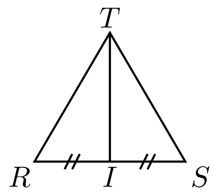
II Sinus et cosinus d'un nombre réel

Exemple

a. $ABCD$ est un carré de côté 1.
Calculer la longueur AC, puis en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.



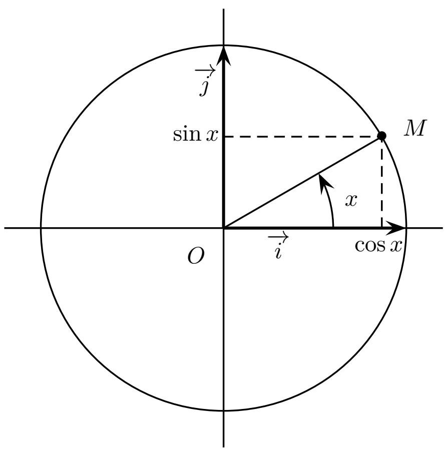
b. RST est un triangle équilatéral de côté 1.
Calculer la longueur TI, en déduire les valeurs exactes de $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.



Définition

Soit M un point du cercle trigonométrique, et x une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{OM})$.

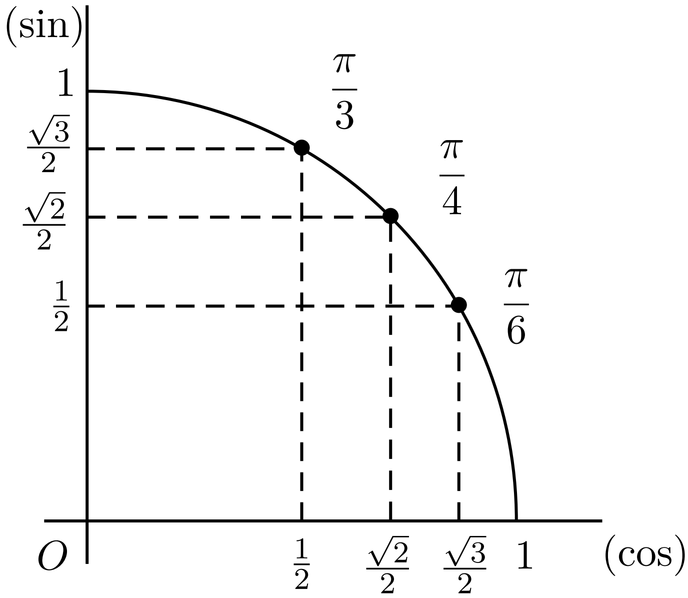
- Le **cosinus** de x, noté $\cos(x)$, est l'abscisse de M
- Le **sinus** de x, noté $\sin(x)$, est l'ordonnée de M



Exemple

Angles remarquables :

x	$0°/0rad$	$30°$ / $\frac{\pi}{6}rad$	$45°$ / $\frac{\pi}{4}rad$	$60°$ / $\frac{\pi}{3}rad$	$90°$ / $\frac{\pi}{2}rad$
$\sin x$	0	$\frac{\mathbf{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{2}$	$\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{2}$	$\frac{\mathbf{1}}{2}$	0



Ces valeurs particulières sont à connaître dans hésiter !

Propriété

Pour tout réel x :

- $-1 \leq \cos(x) \leq 1$
- $-1 \leq \sin(x) \leq 1$
- $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$
- $\cos(-x) = \cos(x)$ **(fonction paire)**
- $\sin(-x) = -\sin(x)$ **(fonction impaire)**
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exemple

Déterminer les valeurs exactes de :

a. $\cos(-\frac{\pi}{3})$ b. $\cos(\frac{2\pi}{3})$ c. $\cos(\frac{5\pi}{6})$ d. $\cos(-\frac{3\pi}{4})$ e. $\sin(\frac{4\pi}{3})$

III Cosinus et sinus d'angles associés

Propriété

- Deux angles sont dits **associés** s'ils admettent des cosinus et des sinus égaux ou opposés.
- Pour tout nombre réel x on a :

  - $\cos(-x) = \cos(x)$
  - $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$
  - $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
  - $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$
  - $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$
  - $\sin(-x) = -\sin(x)$
  - $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$
  - $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
  - $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$
  - $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$

Exemple

Simplifier les expressions :

a. $A = \cos(\frac{\pi}{2} - x) + \sin(-x) + \cos(-x)$

b. $B = \sin(\pi - x) + \cos(\pi + x) + \sin(x + \pi)$

c. $C = \sin(\frac{\pi}{2} - x) + \cos(\pi - x) + \sin(-x)$

d. $D = \cos(x+\pi) + \sin(\pi - x) + \cos(x + 2\pi)$

IV Équations trigonométriques

Propriété

- Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos(x) = \cos(a)$ sont : $\begin{cases} x &= a + 2k\pi \\ x &= -a + 2k\pi \end{cases}$ où k est un entier relatif quelconque.
- Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin(x) = \sin(a)$ sont : $\begin{cases} x &= a + 2k\pi \\ x &= \pi - a + 2k\pi \end{cases}$ où k est un entier relatif quelconque.

Exemple

Résoudre les équations sur $\mathbb{R}$, puis sur $[0; 4\pi[$:

a. $\cos x = \cos(\frac{\pi}{6})$

b. $\sin x = \sin(\frac{2\pi}{3})$

c. $\cos t = \cos(\frac{5\pi}{6})$

d. $\sin t = \sin(\frac{\pi}{8})$

e. $\cos x = 0$

f. $\cos x = \frac{1}{2}$

g. $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

h. $\cos x = \cos(x + \frac{\pi}{4})$

i. $\cos x = \sin(\frac{\pi}{3})$

j. $\cos x = \sin(\frac{\pi}{12})$

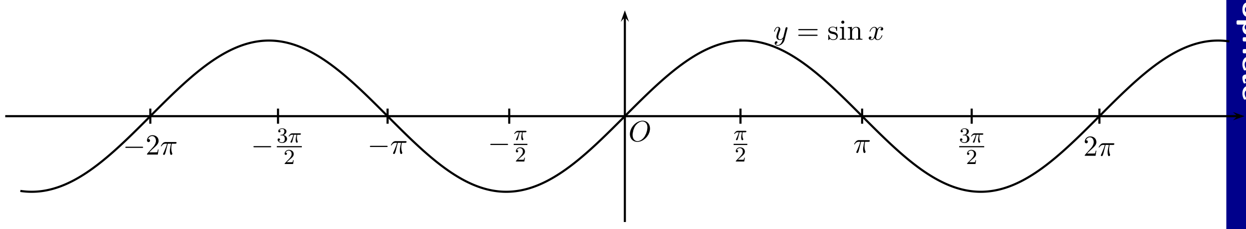
k. $\sin x = \cos x$

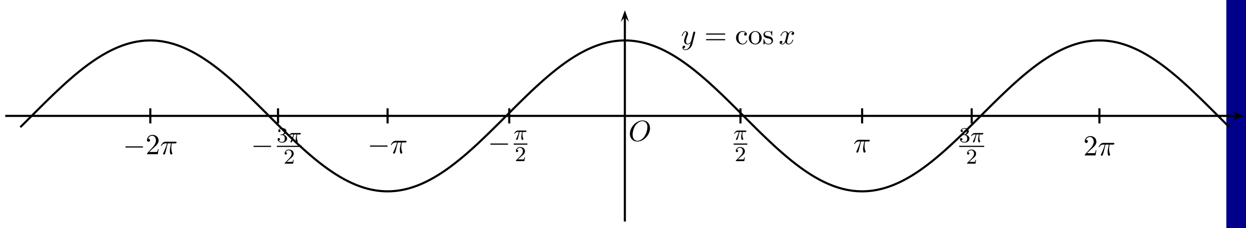
l. $\cos(2x) = \sin(\frac{x}{2})$

V Fonction sinus et cosinus

Propriété

- Pour tout réel x, $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$.
  Les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont **périodiques** de période 2π.
  Les courbes représentatives des fonctions sinus (sinusoïde) et cosinus (cosinusoïde) sont inchangées par translation de vecteur $2\pi\,\overrightarrow{i}$
- Pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$
  La fonction cosinus est **paire**, sa courbe représentative admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
- Pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$
  La fonction sinus est **impaire**, sa courbe représentative admet l'origine du repère comme centre de symétrie.





Exemple

L'évolution de la population P d'animaux dans une forêt est modélisée par :

$$P(t) = 500 + 50\sin(2\pi t - \frac{\pi}{2}),$$

où t est exprimé en années.

a. Calculer $P(0)$; $P(\frac{1}{2})$ et $P(1)$.

b. Quelle est la période de la fonction P ?

c. Pour quelle valeur de t, la population est-elle à son maximum la première année ? Quelle est la population maximum ?

VI Fonctions sinusoïdales : $t \mapsto A\cos(\omega t + \phi)$ et $t \mapsto A\sin(\omega t + \phi)$.

Remarque

En physique, de nombreux phénomènes sont liés à la propagation d'onde : le son, la lumière, ...
Les grandeurs associées à ces ondes peuvent être mathématisées par des fonctions sinusoïdales du type : $t \mapsto A\cos(\omega t + \phi)$ et $t \mapsto A\sin(\omega t + \phi)$.

Définition

- **L'amplitude** d'une fonction périodique est sa valeur maximale.
- $\omega t + \phi$ est appelé la **phase instantanée** du signal.
  Si $t = 0$, ϕ est appelé la **phase à l'origine** du signal.
  ω est appelé **la pulsation** du signal.
- **La période** d'une fonction est l'intervalle pour lequel la courbe de la fonction se reproduit à l'identique.

Propriété

- L'amplitude des fonctions $t \mapsto A\cos(\omega t + \phi)$ et $t \mapsto A\sin(\omega t + \phi)$ est A.
- La période des fonctions $t \mapsto A\cos(\omega t + \phi)$ et $t \mapsto A\sin(\omega t + \phi)$ est $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Remarque

- En physique, la phase s'exprime en radians et la pulsation en radians par seconde.
- En physique, la période s'exprime en secondes.