

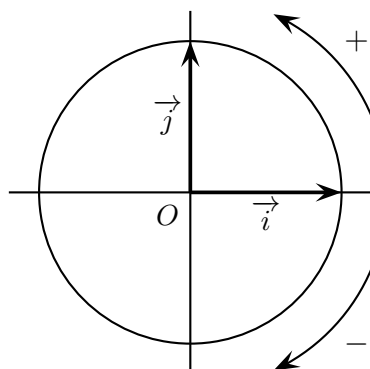


FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

I Cercle trigonométrique : mesure des angles orientés.

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1 sur lequel on a choisi :

- un **sens direct**, ou sens positif, sens inverse des aiguilles d'une montre
- un **sens indirect**, ou sens négatif, sens des aiguilles d'une montre.



La circonférence du cercle trigonométrique est $2 \times \pi \times r$ avec r le rayon de notre cercle trigonométrique. Or $r = 1$, donc la circonférence du cercle est 2π .

Sur le cercle trigonométrique, la mesure en radians d'un angle orienté est égale à la mesure algébrique (avec un signe) de l'arc intercepté

Définition

Exemple

Un tour complet, soit 360° , mesure 2π radians.

Un demi-tour correspond donc à une longueur de π radians.

Un quart de tour, $\frac{\pi}{2}$ radians.

Exemple

Compléter :

Degrés	0	30	45	60	90	135	180	360
Radians	0							

Exemple

Exercices 1-21-22-2-3-4-10-28

Définition

La **mesure principale** d'un angle orienté est la mesure de cet angle appartenant à l'intervalle $] -\pi; \pi]$.

Exemple

L'angle orienté $(\vec{j}; \vec{i})$ a plusieurs mesures : $\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2} + 2\pi\ldots$

Sa mesure principale est $-\frac{\pi}{2}$

Exemple

Pour trouver la mesure principale d'un angle, par exemple $\frac{17\pi}{3}$.

a. Je cherche les multiples de 3 encadrant 17. Il y a $3 \times 5 = 15$ et $3 \times 6 = 18$. Je dois choisir le multiple tel que, le nombre par lequel je multiplie, soit pair. Donc ici, $3 \times \boxed{6} = 18$ car 6 est pair.

b. Je décompose alors $\frac{17\pi}{3} = \frac{18\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 6\pi - \frac{\pi}{3}$

c. La mesure principale de $\frac{17\pi}{3}$ est $-\frac{\pi}{3}$.

Autre exemple : $\frac{29\pi}{6} = \frac{24\pi}{6} + \frac{5\pi}{6}$ La mesure principale est $\frac{5\pi}{6}$.

Exemple

Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :

a. $\frac{7\pi}{3}$

b. $-\frac{11\pi}{6}$

c. $\frac{9\pi}{8}$

d. $\frac{15\pi}{2}$

e. $\frac{26\pi}{4}$

f. $-\frac{13\pi}{5}$

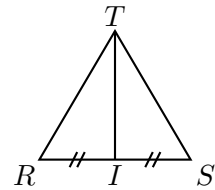
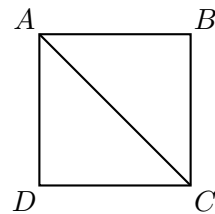
Exemple

Exercices 5-6-7-8-9-11-13-14-15-16-17-18-19-20-23-24-25-26-27-57-58-59-60-61-62

II Sinus et cosinus d'un nombre réel

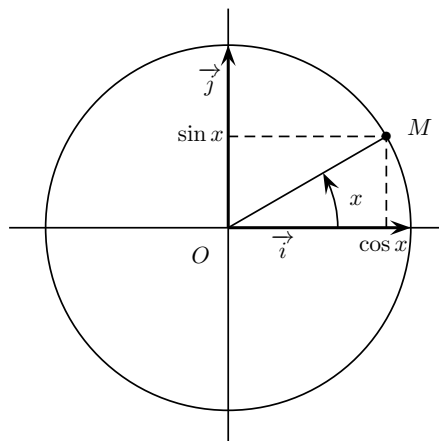
Exemple

- $ABCD$ est un carré de côté 1.
Calculer la longueur AC , puis en déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{4})$ et $\sin(\frac{\pi}{4})$.
- RST est un triangle équilatéral de côté 1.
Calculer la longueur TI , en déduire les valeurs exactes de $\sin(\frac{\pi}{6})$, $\cos(\frac{\pi}{3})$ et $\sin(\frac{\pi}{3})$.



Soit M un point du cercle trigonométrique, et x une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}; \overrightarrow{OM})$.

- Le **cosinus** de x , noté $\cos(x)$, est l'abscisse de M
- Le **sinus** de x , noté $\sin(x)$, est l'ordonnée de M

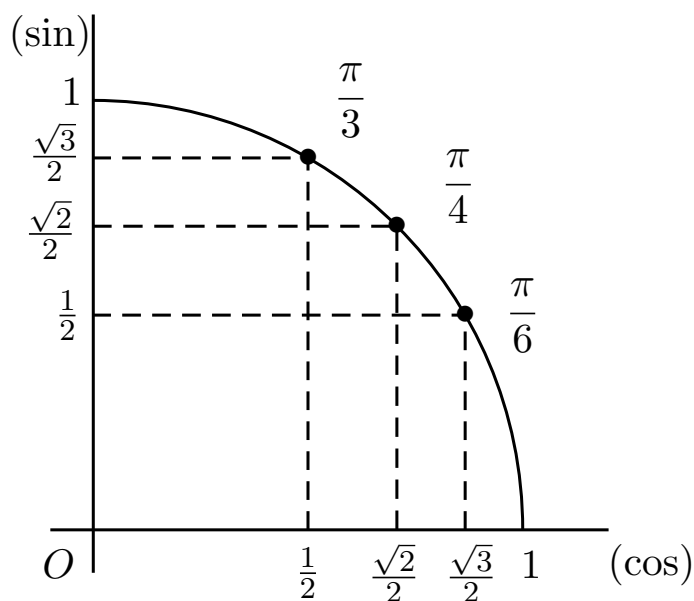


Définition

Exemple

Angles remarquables :

x	$0^\circ/0rad$	$30^\circ / \frac{\pi}{6}rad$	$45^\circ / \frac{\pi}{4}rad$	$60^\circ / \frac{\pi}{3}rad$	$90^\circ / \frac{\pi}{2}rad$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



Ces valeurs particulières sont à connaître dans hésiter !

Propriété

Pour tout réel x :

- $-1 \leq \cos(x) \leq 1$
- $-1 \leq \sin(x) \leq 1$
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $\cos(-x) = \cos(x)$ (**fonction paire**)
- $\sin(-x) = -\sin(x)$ (**fonction impaire**)
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exemple

Déterminer les valeurs exactes de :

- a. $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ b. $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ c. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ d. $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ e. $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

III Cosinus et sinus d'angles associés

- Deux angles sont dits **associés** s'ils admettent des cosinus et des sinus égaux ou opposés.
- Pour tout nombre réel x on a :

- | | |
|--|---------------------------------------|
| • $\cos(-x) = \cos(x)$ | • $\sin(-x) = -\sin(x)$ |
| • $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ | • $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ |
| • $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ | • $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ |
| • $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$ | • $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$ |
| • $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$ | • $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$ |

Propriété

Exemple

Simplifier les expressions :

- | | |
|--|---|
| a. $A = \cos(\frac{\pi}{2} - x) + \sin(-x) + \cos(-x)$ | c. $C = \sin(\frac{\pi}{2} - x) + \cos(\pi - x) + \sin(-x)$ |
| b. $B = \sin(\pi - x) + \cos(\pi + x) + \sin(x + \pi)$ | d. $D = \cos(x + \pi) + \sin(\pi - x) + \cos(x + 2\pi)$ |

Exemple

Exercices 12-29-30-31-32-37-45-46-54-63-64-65-66-68-77-81

IV Équations trigonométriques

- Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos(x) = \cos(a)$ sont : $\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = -a + 2k\pi \end{cases}$ où k est un entier relatif quelconque.
- Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin(x) = \sin(a)$ sont : $\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases}$ où k est un entier relatif quelconque.

Propriété

Exemple

Résoudre les équations sur $\mathbb{R}$, puis sur $[0; 4\pi[$:

- | | | |
|------------------------------------|---------------------------------------|------------------------------------|
| a. $\cos x = \cos(\frac{\pi}{6})$ | e. $\cos x = 0$ | i. $\cos x = \sin(\frac{\pi}{3})$ |
| b. $\sin x = \sin(\frac{2\pi}{3})$ | f. $\cos x = \frac{1}{2}$ | j. $\cos x = \sin(\frac{\pi}{12})$ |
| c. $\cos t = \cos(\frac{5\pi}{6})$ | g. $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | k. $\sin x = \cos x$ |
| d. $\sin t = \sin(\frac{\pi}{8})$ | h. $\cos x = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ | l. $\cos(2x) = \sin(\frac{x}{2})$ |

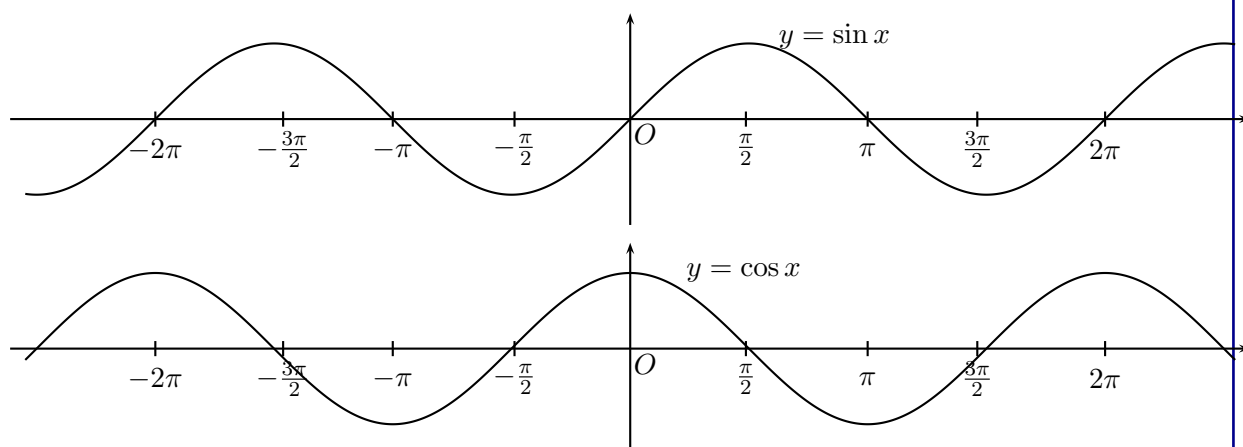
Exemple

Exercices 33-34-35-36-38-39-40-43-44-47-48-49-55-56-67-69-71-78-79-80-84

V Fonction sinus et cosinus

Propriété

- Pour tout réel x , $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.
Les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont **périodiques** de période 2π .
Les courbes représentatives des fonctions sinus (sinusoïde) et cosinus (cosinusoïde) sont inchangées par translation de vecteur $2\pi \vec{i}$
- Pour tout réel x , $\cos(-x) = \cos(x)$
La fonction cosinus est **paire**, sa courbe représentative admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
- Pour tout réel x , $\sin(-x) = -\sin(x)$
La fonction sinus est **impaire**, sa courbe représentative admet l'origine du repère comme centre de symétrie.



Exemple

L'évolution de la population P d'animaux dans une forêt est modélisée par :

$$P(t) = 500 + 50 \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right),$$

où t est exprimé en années.

- Calculer $P(0)$; $P(\frac{1}{2})$ et $P(1)$.
- Quelle est la période de la fonction P ?
- Pour quelle valeur de t , la population est-elle à son maximum la première année? Quelle est la population maximum?

VI Fonctions sinusoïdales : $t \mapsto A \cos(\omega t + \phi)$ et $t \mapsto A \sin(\omega t + \phi)$.

En physique, de nombreux phénomènes sont liés à la propagation d'onde : le son, la lumière, Les grandeurs associées à ces ondes peuvent être mathématisées par des fonctions sinusoïdales du type : $t \mapsto A \cos(\omega t + \phi)$ et $t \mapsto A \sin(\omega t + \phi)$.

Remarque

- **L'amplitude** d'une fonction périodique est sa valeur maximale.
- $\omega t + \phi$ est appelé la **phase instantanée** du signal.
Si $t = 0$, ϕ est appelé la **phase à l'origine** du signal.
 ω est appelé la **pulsation** du signal.
- **La période** d'une fonction est l'intervalle pour lequel la courbe de la fonction se reproduit à l'identique.

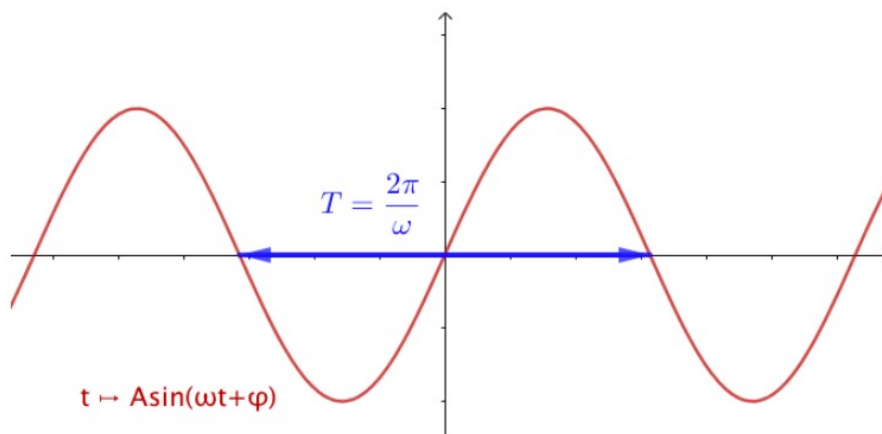
Définition

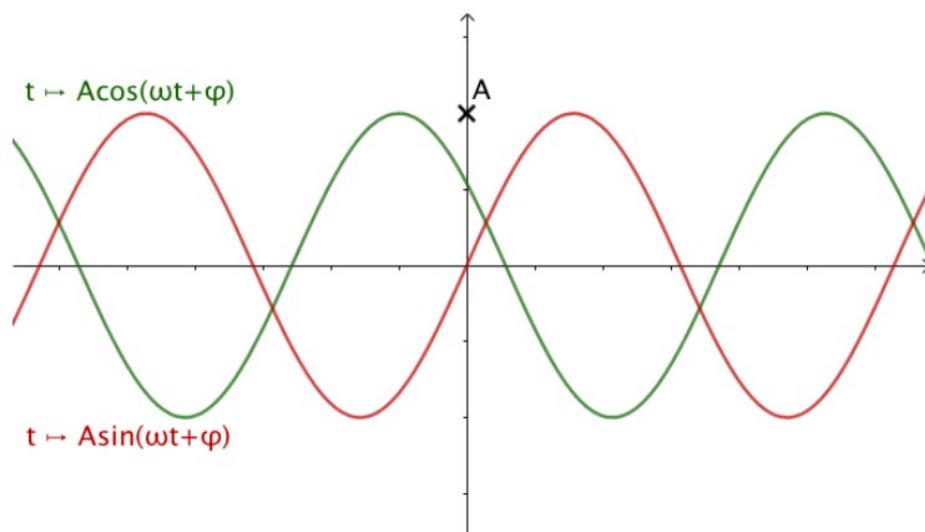
- L'amplitude des fonctions $t \mapsto A \cos(\omega t + \phi)$ et $t \mapsto A \sin(\omega t + \phi)$ est A .
- La période des fonctions $t \mapsto A \cos(\omega t + \phi)$ et $t \mapsto A \sin(\omega t + \phi)$ est $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Propriété

- En physique, la phase s'exprime en radians et la pulsation en radians par seconde.
- En physique, la période s'exprime en secondes.

Remarque





Exemple

Exercices 41-42-50-51-52-53-70-72-73-74-75-76-82-83-85-86-87