

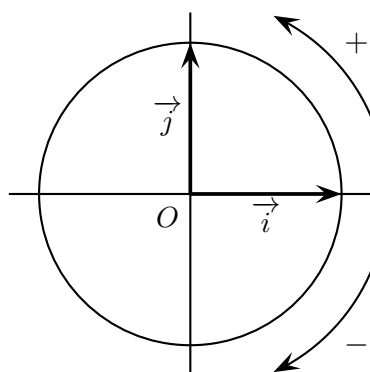


FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

I Cercle trigonométrique : mesure des angles orientés.

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1 sur lequel on a choisi :

- un **sens direct**, ou sens positif, sens inverse des aiguilles d'une montre
- un **sens indirect**, ou sens négatif, sens des aiguilles d'une montre.



Sur le cercle trigonométrique, la mesure en radians d'un angle orienté est égale à la mesure algébrique (avec un signe) de l'arc intercepté

Définition

Exemple

Un tour complet, soit 360° , mesure 2π radians.

$$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ radians (1/4 de tour).}$$

On parle **d'angle** mesure de l'angle orienté car il en possède une infinité :

L'angle orienté $(\vec{i}; \vec{j})$ mesure $-\frac{\pi}{2}$ radians. $\frac{\pi}{2}$ radians, $\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$ rad, $\frac{5\pi}{2} + 2\pi = \frac{9\pi}{2}$ rad, ...,

$$\frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2} \text{ rad, ...}$$

Exemple

Compléter :

Degrés	0	30	45	60	90	135	180	360
Radians	0							

Degrés	1		-15	20	270		
Radians		1				$\frac{167\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{3}$

La **mesure principale** d'un angle orienté est la mesure de cet angle appartenant à l'intervalle $] -\pi; \pi]$.

Exemple

L'angle orienté $(\vec{j}; \vec{i})$ a plusieurs mesures : $\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2} + 2\pi \dots$

Sa mesure principale est $-\frac{\pi}{2}$

Exemple

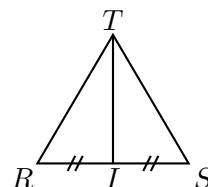
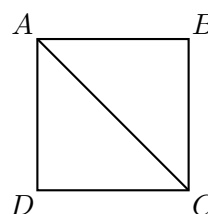
Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :

- a. $\frac{7\pi}{3}$ b. $-\frac{11\pi}{6}$ c. $\frac{9\pi}{8}$ d. $\frac{15\pi}{2}$ e. $\frac{26\pi}{4}$ f. $-\frac{13\pi}{5}$

II Sinus et cosinus d'un nombre réel

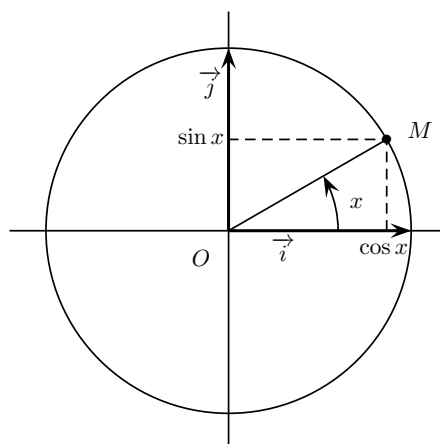
Exemple

- a. $ABCD$ est un carré de côté 1.
Calculer la longueur AC , puis en déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{4})$ et $\sin(\frac{\pi}{4})$.
- b. RST est un triangle équilatéral de côté 1.
Calculer la longueur TI , en déduire les valeurs exactes de $\sin(\frac{\pi}{6})$, $\cos(\frac{\pi}{3})$ et $\sin(\frac{\pi}{3})$.



Soit M un point du cercle trigonométrique, et x une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}; \overrightarrow{OM})$.

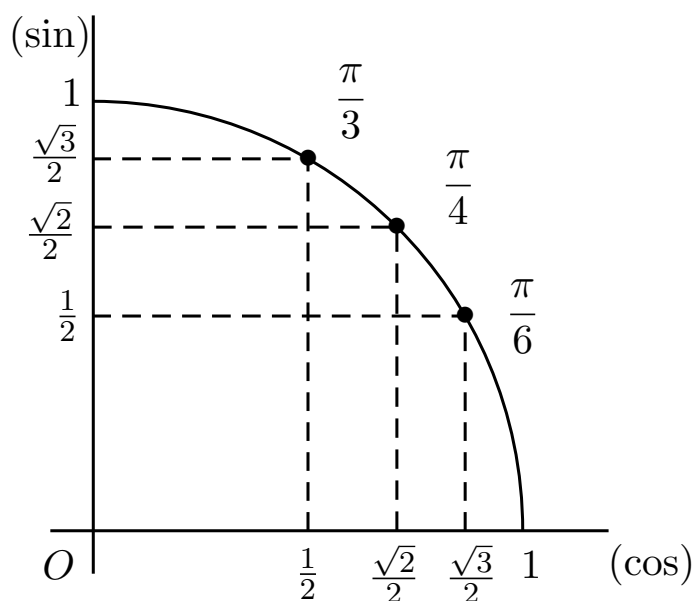
- Le **cosinus** de x , noté $\cos(x)$, est l'abscisse de M
- Le **sinus** de x , noté $\sin(x)$, est l'ordonnée de M



Exemple

Angles remarquables :

x	$0^\circ/0rad$	30° $/\frac{\pi}{6}rad$	45° $/\frac{\pi}{4}rad$	60° $/\frac{\pi}{3}rad$	90° $/\frac{\pi}{2}rad$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



Ces valeurs particulières sont à connaître dans hésiter !

Pour tout réel x :

- $-1 \leq \cos(x) \leq 1$
- $-1 \leq \sin(x) \leq 1$
- $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$
- $\cos(-x) = \cos(x)$ (**fonction paire**)
- $\sin(-x) = -\sin(x)$ (**fonction impaire**)
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Propriété

Exemple

Déterminer les valeurs exactes de :

- a. $\cos(-\frac{\pi}{3})$ b. $\cos(\frac{2\pi}{3})$ c. $\cos(\frac{5\pi}{6})$ d. $\cos(-\frac{3\pi}{4})$ e. $\sin(\frac{4\pi}{3})$

III Cosinus et sinus d'angles associés

Propriété

- Deux angles sont dits **associés** s'ils admettent des cosinus et des sinus égaux ou opposés.
- Pour tout nombre réel x on a :

• $\cos(-x) = \cos(x)$	• $\sin(-x) = -\sin(x)$
• $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$	• $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$
• $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	• $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
• $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$	• $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$
• $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$	• $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$

Exemple

Simplifier les expressions :

a. $A = \cos(\frac{\pi}{2} - x) + \sin(-x) + \cos(-x)$	c. $C = \sin(\frac{\pi}{2} - x) + \cos(\pi - x) + \sin(-x)$
b. $B = \sin(\pi - x) + \cos(\pi + x) + \sin(x + \pi)$	d. $D = \cos(x + \pi) + \sin(\pi - x) + \cos(x + 2\pi)$

IV Équations trigonométriques

Propriété

- Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos(x) = \cos(a)$ sont : $\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = -a + 2k\pi \end{cases}$ où k est un entier relatif quelconque.
- Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin(x) = \sin(a)$ sont : $\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases}$ où k est un entier relatif quelconque.

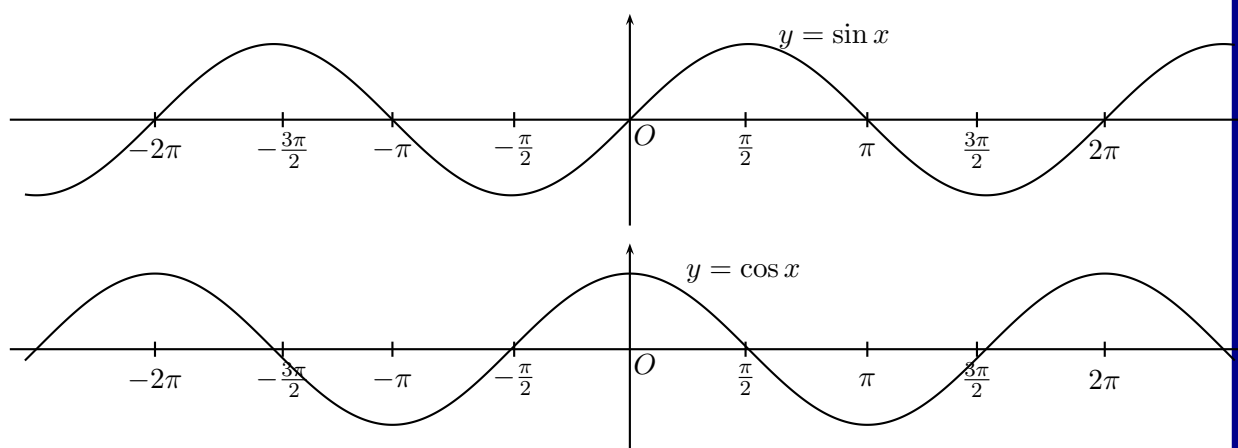
Exemple

Résoudre les équations sur $\mathbb{R}$, puis sur $[0; 4\pi[$:

a. $\cos x = \cos(\frac{\pi}{6})$	e. $\cos x = 0$	i. $\cos x = \sin(\frac{\pi}{3})$
b. $\sin x = \sin(\frac{2\pi}{3})$	f. $\cos x = \frac{1}{2}$	j. $\cos x = \sin(\frac{\pi}{12})$
c. $\cos t = \cos(\frac{5\pi}{6})$	g. $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	k. $\sin x = \cos x$
d. $\sin t = \sin(\frac{\pi}{8})$	h. $\cos x = \cos(x + \frac{\pi}{4})$	l. $\cos(2x) = \sin(\frac{x}{2})$

V Fonction sinus et cosinus

- Pour tout réel x , $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.
Les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont **périodiques** de période 2π .
Les courbes représentatives des fonctions sinus (sinusoïde) et cosinus (cosinusoïde) sont inchangées par translation de vecteur $2\pi \vec{i}$.
- Pour tout réel x , $\cos(-x) = \cos(x)$
La fonction cosinus est **paire**, sa courbe représentative admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
- Pour tout réel x , $\sin(-x) = -\sin(x)$
La fonction sinus est **impaire**, sa courbe représentative admet l'origine du repère comme centre de symétrie.



Propriété

Exemple

L'évolution de la population P d'animaux dans une forêt est modélisée par :

$$P(t) = 500 + 50 \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right),$$

où t est exprimé en années.

- Calculer $P(0)$; $P(\frac{1}{2})$ et $P(1)$.
- Quelle est la période de la fonction P ?
- Pour quelle valeur de t , la population est-elle à son maximum la première année ? Quelle est la population maximum ?

VI Fonctions sinusoïdales : $t \mapsto A \cos(\omega t + \phi)$ et $t \mapsto A \sin(\omega t + \phi)$.

En physique, de nombreux phénomènes sont liés à la propagation d'ondes : le son, la lumière, Les grandeurs associées à ces ondes peuvent être mathématisées par des fonctions sinusoïdales du type : $t \mapsto A \cos(\omega t + \phi)$ et $t \mapsto A \sin(\omega t + \phi)$.

Remarque

- **L'amplitude** d'une fonction périodique est sa valeur maximale.
- $\omega t + \phi$ est appelé la **phase instantanée** du signal.
Si $t = 0$, ϕ est appelé la **phase à l'origine** du signal.
 ω est appelé la **pulsation** du signal.
- **La période** d'une fonction est l'intervalle pour lequel la courbe de la fonction se reproduit à l'identique.

- L'amplitude des fonctions $t \mapsto A \cos(\omega t + \phi)$ et $t \mapsto A \sin(\omega t + \phi)$ est A .
- La période des fonctions $t \mapsto A \cos(\omega t + \phi)$ et $t \mapsto A \sin(\omega t + \phi)$ est $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

- En physique, la phase s'exprime en radians et la pulsation en radians par seconde.
- En physique, la période s'exprime en secondes.

