Version 220805

LABOR ET DILECTIO — PAU 1884

2022/2023

Suites numériques

Archimède est avec **Euclide** le plus grand mathématicien de l'Antiquité. Il vivait à Syracuse en Sicile. Sa découverte du principe ou de la poussée d'Archiméde est souvent racontée de façon romancée. On sait moins qu'il fut le premier à utiliser des suites convergentes. Pour calculer une valeur approchée du nombre π il inscrit et circonscrit au cercle des polygones ayant de plus en plus de côtés, jusqu'à 96. Il calcule de même l'aire englobée par un arc de parabole et fait converger une suite géométrique pour obtenir le résultat.

I Généralités sur les suites de nombres réels

Définition

Une suite u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ qui à tout entier naturel associe le réel $u(n)$, noté u_n. Cette suite se note u, (u_n), $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$
Vocabulaire : u_n est appelé le **terme général** de la suite (u_n) ou le terme de rang n (d'indice n). u_0 est appelé le terme initial de la suite (u_n).

Définition

- Lorsqu'une suite est donnée par son terme général u_n exprimé en fonction de n indépendamment des termes précédents, on dit que la suite est définie sous **forme explicite**.
- Lorsqu'une suite est donnée par son premier terme et une relation exprimant chaque terme en fonction du précédent, on dit que la suite est définie par une **relation de récurrence.**

II Suites classiques

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On dit que :

- u est **arithmétique** s'il existe $r \in \mathbb{R}$, appelé raison, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$
- u est **géométrique** s'il existe $q \in \mathbb{R}$, appelé raison, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$
- u est **arithmético-géométrique** s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, appelé raison, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$

Remarque

Les suites arithmétiques et géométriques sont des cas particuliers de suites arithmético-géométriques.

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

- Si u est la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
- Si u est la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.

Propriété

Somme des premiers termes d'une suite géométrique : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Exercice 1 :

Démontrer la propriété précédente

Exercice 2 :

Calculer les sommes ci-dessous :

a. $S = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^13$

b. $S = 4 + 16 + ... + 256$

Théorème

Étant donnée une fonction $f : I \longmapsto I$ définie et à valeurs dans un même intervalle I, et $a \in I$, il existe une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, unique , telle que $u_0 = a$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

De plus, $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de I. la fonction f est appelée la **fonction itératrice.**

III Limite d'une suite

Définition

Soit (u_n) une suite de nombres réels définie sur $\mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{R}$. On dit que

- **(u_n) admet l pour limite**, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, si les valeurs u_n sont arbitrairement proches de l pourvu que n soit assez grand.
- **(u_n) admet $+\infty$ pour limite**, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, si les valeurs u_n sont arbitrairement grandes pourvu que n soit assez grand.
- **(u_n) admet $-\infty$ pour limite** , et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, si les valeurs u_n sont arbitrairement petites pourvu que n soit assez grand.

Lorsqu'elle existe, la limite de la suite (u_n) est unique.

Remarque

Lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ avec $l \in \mathbb{R}$, on dit que la suite **converge** vers l.
Lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$, on dit que la suite **diverge** vers $\pm\infty$.
Une suite qui n'admet aucune limite est une suite divergente. Par exemple, $u_n = (-1)^n$ diverge.

Exemple

Dire intuitivement, si les suites ci-dessous sont convergentes ou divergentes, préciser leur limite :

a. $u_n = n^2$

b. $u_n = n$

c. $u_n = \dfrac{1}{n}$

d. $u_n = \dfrac{1}{n} + 3$

e. $u_n = \sqrt{n-2}$

f. $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n}}$

IV Opérations sur les limites

Théorème

Somme de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$

Soit l, la limite de la suite (u_n), et l' la limite de la suite (v_n).

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$l' \in \mathbb{R}$	$l' = +\infty$	$l' = -\infty$
$l \in \mathbb{R}$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$l = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**FI**
$l = -\infty$	$-\infty$	**FI**	$-\infty$

Produit de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$

Soit l, la limite de la suite (u_n), et l' la limite de la suite (v_n).

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$l' = 0$	$l' = \pm\infty$
$l \in \mathbb{R}^*$	$l \times l'$	0	$\pm\infty$
$l = 0$	0	0	**FI**
$l = \pm\infty$	$\pm\infty$	**FI**	$\pm\infty$

Quotient de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n}$

Soit l, la limite de la suite (u_n), et l' la limite de la suite (v_n).

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$l' = 0$	$l' = \pm\infty$
$l \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{l'}{l}$	0	$\pm\infty$
$l = \pm\infty$	0	0	**FI**

FI est une forme indéterminée.
$\pm\infty$ se détermine à l'aide de la règle des signes.

Exemple

Exercice 1

Donner les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + n$ b. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2(\dfrac{1}{\sqrt{n}} + 1)$ c. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{-n^2 - 3}$

Exercice 2

Donner les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 5n + 1$ b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

V Limites et comparaison

Théorème

Passage à la limite dans une inégalité : Soient (u_n) et (v_n) deux suites admettant des limites.

- Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ alors $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang.

Théorème

Théorème de comparaison : Soit (u_n) et (v_n) deux suites de réels telles qu'à partir d'un certain rang N, on ait $u_n \leq v_n$.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Théorème

Théorème d'encadrement ou « des gendarmes » : Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites de réels telles qu'à partir d'un certain rang N, on ait $u_n \leq v_n \leq w_n$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$

Exemple

A l'aide des théorèmes précédents, déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + (-1)^n$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{\sin(n)}{n}$

VI Limites des suites géométriques

Théorème

Limite d'une suite géométrique de raison positive : Soit la suite (u_n) une suite géométrique de raison strictement positive $q \in \mathbb{R}_+^*$

- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) diverge vers $u_0 \times \infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0 \times \infty$
- Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante et égale à u_0 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) converge vers 0 : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exemple

Donner la limites des suites géométriques ci-dessous :

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{3})^n$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + 0,5^n)$

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{3}$

e. $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + 3 \times (\frac{1}{5})^n$

f. $\lim\limits_{n\to+\infty} 1^n + 7$

Théorème

Somme des termes d'une suite géométrique : soit la suite (u_n) une suite géométrique de raison strictement positive q vérifiant $0 < q < 1$. Alors la somme des n premiers termes de la suite tend vers une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{u_0}{1-q}$$

Exercice 1 :

Démontrer le théorème précédent.

Exercice 2 :

Calculer la limite de la somme suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+...+(\frac{1}{2})^n$

Exercice 3 :

Un entrepreneur investit un capital de départ de 20 000 € pour son entreprise. Afin de la dynamiser, il injecte chaque mois une somme supplémentaire à son capital, celle-ci diminue de 30 % chaque mois.

a. Calculer le total du capital investi à la fin de la première année.

b. Que peut-on penser de l'évolution de la somme total du capital investi dans un futur éloigné ?

Exercice 4 :

Un investisseur dépose 5000 € sur un compte rémunéré à 3% par an. Chaque année suivante, il dépose 300 € de plus.
On note u_n la somme épargnée à l'année n.
On a alors $u_{n+1} = 1,03u_n + 300$ et $u_0 = 5000$.

a. Calculer u_1 et u_2

b. Démontrer que la suite (c_n) définie pour tout entier n par $c_n = -10000$ vérifie la relation de récurrence de (u_n).

c. Prouver que la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n - c_n$ est géométrique et donner sa raison et son premier terme.

d. Exprimer v_n en fonction de n.

e. En déduire u_n en fonction de n. Calculer u_{10}.

f. Étudier les variations de (u_n).

g. Calculer la limite de (u_n).

VII Représentation graphique d'une suite arithmético-géométrique

Théorème

Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle I et soit une suite (u_n) telle que pour tout entiers n, on a : $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers L de I alors $f(L) = L$.

Exercice

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie par $f(x) = 0,85x + 1,8$.

a. (a) Calculer u_1

   (b) Dans un repère orthonormé, tracer la courbe représentative de f et la droite d'équation et $y = x$

   (c) Dans ce repère, placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe u_1, u_2 et u_3. On laissera apparent les traits de construction.

   (d) À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (u_n).

b. En supposant que la suite (u_n) est convergente, démontrer le résultat conjecturé dans la question 1c.