Version 250107

2024/2025

Suites numériques

Archimède est avec **Euclide** le plus grand mathématicien de l'Antiquité. Il vivait à Syracuse en Sicile. Sa découverte du principe ou de la poussée d'Archiméde est souvent racontée de façon romancée. On sait moins qu'il fut le premier à utiliser des suites convergentes. Pour calculer une valeur approchée du nombre π il inscrit et circonscrit au cercle des polygones ayant de plus en plus de côtés, jusqu'à 96. Il calcule de même l'aire englobée par un arc de parabole et fait converger une suite géométrique pour obtenir le résultat.

I Généralités sur les suites de nombres réels

Définition

Une suite u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ qui à tout entier naturel associe le réel $u(n)$, noté u_n. Cette suite se note u, (u_n), $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$
Vocabulaire : u_n est appelé le **terme général** de la suite (u_n) ou le terme de rang n (d'indice n). u_0 est appelé le terme initial de la suite (u_n).

Exemple

Calculer les quatre premiers termes des suites suivantes :

a. $u_n = 2n$

b. $v_n = 3n^2 - 1$

Définition

- Lorsqu'une suite est donnée par son terme général u_n exprimé en fonction de n indépendamment des termes précédents, on dit que la suite est définie sous **forme explicite**.
- Lorsqu'une suite est donnée par son premier terme et une relation exprimant chaque terme en fonction du précédent, on dit que la suite est définie par une **relation de récurrence.**

Exemple

Calculer les quatre premiers termes des suites suivantes, définies par récurrence :

a. $\begin{cases} u_0 &= 5 \\ u_{n+1} &= 3u_n \end{cases}$

b. $\begin{cases} v_0 &= 3 \\ v_{n+1} &= 4v_n - 6 \end{cases}$

Remarque

Pour calculer les termes consécutifs d'une suite définie par récurrence il est possible d'utiliser la programmation :
On donne pour tout entier n,
$\begin{cases} u_0 &= 3 \\ u_{n+1} &= 4u_n - 6 \end{cases}$
Écrire un programme Python permettant de calculer les termes de la suite (u_n).
Donner alors u_{13}.

Exemple

On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n^2}{2} - 3$.
Représenter dans un repère les premiers termes de la suite (u_n).

II Sens de variation d'une suite.

Exemple

Représenter graphiquement la suite définie par $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= 2u_n \end{cases}$

Définition

- La suite (u_n) est croissante si pour tout entier n, $u_{n+1} \geq u_n$.
- La suite (u_n) est décroissante si pour tout entier n, $u_{n+1} \leq u_n$.
- La suite (u_n) est constante si pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n$.

Si les inégalités sont strictes, alors la suite est **strictement** croissante/décroissante.

Exemple

a. Pour tout entier n on donne la suite (u_n) tel que $u_{n+1} = u_n + 2$. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
b. Pour tout entier n on donne la suite (v_n) tel que $v_n = 4n + 4$. Démontrer que la suite (v_n) est croissante.

III Suites classiques

III.1 Suites arithmétiques

Exemple

On considère 3 nombres consécutifs : -2 ; 5 et 12.
Dans cet ordre, ces nombres peuvent-ils être les termes consécutifs d'une suite arithmétique ?
Pour y répondre, **il faut s'assurer que la différence entre deux termes consécutifs reste la même.**
$5 - (-2) = 7$ et $12 - 5 = 7$ Ce sont donc les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 7.
On note alors (u_n) cette suite : $u_{n+1} = u_n + 7$

III.2 Formule et récurrence et forme explicite d'une suite arithmétique

Propriété

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, on a :

- $u_{n+1} = u_n + r$ (formule de récurrence)
- $u_n = u_0 + nr$ (forme explicite)

On a également les propriétés suivantes :

- Si la raison est positive alors la suite est croissante.
- Si la raison est négative alors la suite est décroissante.
- Si la raison est nulle alors la suite est constante.
- Les points de la représentation graphique sont alignés. La croissance est linéaire

Démonstration

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, on a :
$u_{n+1} - u_n = u_n + r - u_n = r$.
Si $r > 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) est croissante.
Si $r < 0$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ donc (u_n) est décroissante.
Si $r = 0$ alors $u_{n+1} - u_n = 0$ donc (u_n) est constante.

Exemple

Étudier les variations des suites arithmétiques définies par :

a. $u_n = 3 + 5n$

b. $\begin{cases} v_O & = -3 \\ v_{n+1} & = v_n - 4 \end{cases}$

Exemple

Pour préparer une course, un athlète décide de s'entraîner de façon progressive.
Il commence son entraînement au « jour 0 » par un petit footing d'une longueur de 3000 m. Au « jour 1 », il court 3150 m. Au « jour 2 », il court 3300 m puis ainsi de suite en parcourant chaque jour 150 m de plus que la veille.
On note u_n la distance parcourue au « jour n » d'entraînement.

a. Calculer u_3 et u_4
b. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? On donnera son premier terme et sa raison.
c. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n
d. Donner la variation de la suite (u_n)
e. Exprimer u_n en fonction de n.

III.3 Suites géométriques

Exemple

On considère la liste des trois nombres suivants : 4, 12 et 36.
Dans cet ordre, ces nombres peuvent-ils être les termes consécutifs d'une suite géométrique ?
Pour y répondre, **il faut s'assurer que le quotient entre deux termes consécutifs reste le même.**

$\frac{12}{4} = 3$

$\frac{36}{12} = 3$

Ce sont donc les termes d'une suite géométrique de raison 3.
On note cette suite (u_n), on a alors : $u_{n+1} = 3u_n$

III.4 Formule et récurrence et forme explicite d'une suite géométrique

Propriété

Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme u_0, on a :

- $u_{n+1} = q \times u_n$ (formule de récurrence)
- $u_n = u_0 \times q^n$ (forme explicite)

On a également les propriétés suivantes :

- Si la raison est supérieure à 1 alors la suite est croissante.
- Si la raison est inférieur à 1 alors la suite est décroissante.
- Si la raison est égale à 1 alors la suite est constante.
- On parle de croissance exponentielle.

Exemple

On place un capital de 500 € sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4% par an.
On note u_n la valeur du capital après n années.

a. Calculer u_2 et u_3.

b. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? On donnera son premier terme et sa raison.

c. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n

d. Donner la variation de la suite (u_n)

e. Exprimer u_n en fonction de n

Exemple

Déterminer le sens de variation des suites définies par :

a. $u_n = 4 \times 2^n$

b. $\begin{cases} v_0 &= 2 \\ v_{n+1} &= \frac{1}{2} v_n \end{cases}$