Corrigé : Exercices

Rep. paramétriques

Dans tous les exercices, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Exercice 1/27

On considère les points $A(-1; -2; 4)$ et $B(\frac{1}{2}; 1; -2)$ et les plans :

$$\mathcal{P}_1 \quad : \quad 3x + 2y - z + 2 = 0 \text{ et } \mathcal{P}_2 \quad : \quad 2x + 2y - \frac{1}{2}z = 0$$

1. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (AB).
2. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (d) intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Solution :

1. $\begin{cases} x &= -1 + \frac{3}{2}t \\ y &= -2 + 3t \\ z &= 4 - 6t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$
2. $\begin{cases} x &= t \\ y &= -\frac{1}{2}t + 1 \\ z &= 2t + 4 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

Exercice 2/27

1. Déterminer un système d'équations paramétriques de l'axe (Oz).
2. Donner un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}_1$ passant par $A(1; 2; -3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
3. Donner un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}_2$ passant par les points $A(0; 5; -7)$ et $B(6; -2; 1)$.

Solution :

1. $\begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

2. $\begin{cases} x &= 4t+1 \\ y &= 2+2t \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \\ z &= -3-t \end{cases}$
3. $\begin{cases} x &= 6t \\ y &= -7t+5 \;\text{ avec } t \in \mathbb{R} \\ z &= 8t-7 \end{cases}$

Exercice 3/27

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(1;-2;3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}4\\5\\-6\end{pmatrix}$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ caractérisé par le point $B(5;-1;0)$ et les vecteurs $\overrightarrow{u}\,\big(1;3;-2\big)$ et $\overrightarrow{v}\,\big(4;7;-1\big)$.
3. Déterminer une équation cartésienne du plan (CDE) où :
$$C(0;1;1),\ D(-4;2;3) \ \text{ et } \ E(4;-1;1).$$

Solution :

1. $4x+5y-6z+24=0$
2. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaire. Soit $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$, donc orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
$-11x+7y+5z+62=0$
3. $x+2y+z-3=0$

Exercice 4/27

1. Déterminer une équation cartésienne des plans :
   (a) (xOy) (b) (yOz) (c) (xOz)
2. Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur du segment $[AB]$ où $A(-3;2;8)$ et $B(1;5;-2)$.
3. On considère le plan $\mathcal{P}$ caractérisé par le point $C(3;-1;2)$ et les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-3\\-1\\3\end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.
   (b) Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.
   A quelle condition M appartient-il à $\mathcal{P}$?
   (c) Soit le vecteur $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}4\\-6\\2\end{pmatrix}$.

Après avoir montré que $\overrightarrow{w}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

Solution :

1. (a) $z = 0$ (b) $x = 0$ (c) $y = 0$
2. $8x + 6y - 20z + 47 = 0$
3. (a) Évident
   (b) $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ coplanaires.
   On obtient $\begin{cases} x &= 3 + 2\alpha - 3\beta \\ y &= -1 + \alpha - \beta \\ z &= 2 - \alpha + 3\beta \end{cases}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$
   (c) $4x - 6y + 2z = 22$.

Exercice 5/27

On définit les plans suivants :

$$\mathcal{P}_1 \quad : \quad 2x - 3y + 6z = 3, \quad \mathcal{P}_2 \quad : \quad -\frac{x}{3} + \frac{y}{2} - z = 1, \quad \mathcal{P}_3 \quad : \quad 4x - 2y + z = 10$$

1. Déterminer l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
2. Déterminer l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$.

Solution :

1. Les plans sont parallèles (vecteurs normaux sont colinéaires).
2. Sécants en une droite.
   $\begin{cases} x &= 9t + 3 \\ y &= 22t + 1 \\ z &= 8t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

Exercice 6/27

Caractériser l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que :

1. $\begin{cases} 2x - y + z &= 3 \\ x + 2y - z &= 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x - 3y + 7z &= 1 \\ -7x + 21y - 49z &= -7 \end{cases}$
3. $\begin{cases} -x + 3y + z &= 3 \\ 2x - 6y - 2z &= 1 \end{cases}$

Solution :

1. Intersection droite $\begin{cases} x &= t \\ y &= 4 - 3t \\ z &= 7 - 5t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$
2. Les plans sont confondus.

$x - 3y + 7z = 1$

3. Les plans sont strictement parallèles

Exercice 7/27

On considère la droite (d) définie par le système $\begin{cases} x &= 1 + 3t \\ y &= -3t \\ z &= 5 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

1. Déterminer sa position par rapport au plan $\mathcal{P}$ d'équation :

$$2x - y + 3z + 10 = 0$$

2. Déterminer sa position par rapport au plan $\mathcal{P}_1$ d'équation :

$$-x - y + 2z - 9 = 0$$

Solution :

1. Point d'intersection $M(-8; 9; 5)$
2. Parallèles et (d) est inclus dans $\mathcal{P}_1$

Exercice 8/27

Déterminer l'intersection :

1. de la droite $\mathcal{D}_1$ définie par $\begin{cases} x &= -1 + 3t \\ y &= 2 - 5t \\ z &= t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ avec le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation cartésienne $3x - 2y + 5z - 1 = 0$;
2. de la droite $\mathcal{D}_2$ définie par $\begin{cases} x &= 2 + 6t \\ y &= 3 - t \\ z &= 12 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ avec le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation cartésienne $x + 6y + 3z - 7 = 0$;
3. de la droite $\mathcal{D}_3$ passant par $A(1; 2; 3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec le plan $\mathcal{P}_3$ caractérisé par le point $O(0; 0; 0)$ et les vecteurs $\overrightarrow{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solution :

1. Point d'intersection $M(0; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$.
2. Strictement parallèles
3. Point d'intersection $M(-2; 0; 2)$

Exercice 9/27

Quelle est la position relative des droites :

$$\mathcal{D}\ :\ \begin{cases} x &= 5+3t \\ y &= 2+t \\ z &= 1-4t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}\ \text{ et }\ \mathcal{D}'\ :\ \begin{cases} x &= 2t'-11 \\ y &= 10-2t' \\ z &= 4+t' \end{cases},\ t'\in\mathbb{R}$$

Justifier.

Solution : Sécante et coplanaire. Point d'intersection $M(-1;0;9)$.

Exercice 10/27

Déterminer les positions relatives des droites suivantes.

1. $\mathcal{D}_1 \begin{cases} x &= -3+2t \\ y &= 5-t \\ z &= 7+4t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_2 \begin{cases} x &= -5-t \\ y &= 6+\dfrac{1}{2}t \\ z &= 2-2t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$
2. $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3 \begin{cases} x &= 4+t \\ y &= -6-3t \\ z &= 21+2t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$
3. $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_4 \begin{cases} x &= -1+3t \\ y &= 2 \\ z &= 7-5t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$
4. $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_5 \begin{cases} x &= 3-3t \\ y &= 2+\dfrac{3}{2}t \\ z &= 19-6t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

Solution :

1. Strictement parallèles
2. Sécante en $M(1;3;15)$
3. Ni parallèles ni sécantes donc non coplanaires
4. Droites confondues

Exercice 11/27

Indiquer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et justifier la réponse.

1. La droite (AB) où $A(-1;6;-1)$ et $B(2;3;5)$ admet pour système d'équations paramétriques :
$$\begin{cases} x &= 1-t \\ y &= 4+t \\ z &= 3-2t \end{cases},\quad t\in\mathbb{R}$$
2. La droite d'intersection des plans d'équations $2x+4y-z-2=0$ et $y-z+3=0$ admet

pour système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x &= -\dfrac{1}{2} + 3t \\ y &= -2 + 2t \\ z &= 1 + 2t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}$$

3. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x + 2y - z - 11 = 0$ et C le point de coordonnées $(1; 0; -2)$.
   Alors $D(3; 2; -1)$ est le projeté orthogonal de C sur le plan $\mathcal{P}$.
4. Les points $E(2; 4; 1)$, $F(0; 4; -3)$ et $G(3; 1; -3)$ appartiennent à un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
5. La droite (CG) a pour représentation paramétrique le système suivant :

$$\begin{cases} x &= -1 + 2t \\ y &= -1 + t \\ z &= -1 - t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R} \text{ et } (CG) \text{ est orthogonale à } (EF).$$

Solution :

1. Vrai
2. Faux
3. Faux
4. Vrai
5. Vrai

Exercice 12/27

Soit ABCDEFGH un cube de côté 1 et $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé de l'espace.

1. Calculer le volume du tétraèdre BCDG.
2. Calculer l'aire du triangle BDG.
3. On appelle distance du point Ω au plan $\mathcal{P}$ la plus petite distance ΩM avec M un point du plan $\mathcal{P}$, elle représente la distance ΩH avec H le projeté orthogonal du point Ω sur le plan $\mathcal{P}$.
   Calculer la distance du point C au plan (BDG).
4. Déterminer une équation cartésienne du plan (BDG).

Solution :

1. $V = \dfrac{1}{6}$ UA
2. $A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3. $CH' = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
4. $-x - y + z + 1 = 0$

Exercice 13/27

L'espace est muni du repère orthonormal $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.
Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendantes.

Partie A

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x+y+z-4=0$, et $\mathcal{P}'$ le plan d'équation $6x+3y-2z-6=0$.

1. Étudier la position relative des plan $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
2. Établir un système d'équations paramétriques de la droite d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
3. Vérifier, pour tout point $M(x;y;z)$, l'équivalence :

$$M(x;y;z) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \iff \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} x &= 5t+3 \\ y &= -8t-2 \\ z &= 3t+3 \end{cases}$$

Partie B

On considère les points $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$ et $C(0;0;-3)$.
Soit $\mathcal{P}''$ le plan d'équation $x+y+z-4=0$.

1. Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.
   Établir que $M \in (AB)$ si, et seulement si, il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x &= 1-t \\ y &= 2t \\ z &= 0 \end{cases}$$

2. Après avoir montré que la droite (AB) et la plan $\mathcal{P}''$ sont sécants, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection I.
3. Montrer que la droite (BC) coupe le plan $\mathcal{P}''$ au point $J(0;2,8;1,2)$.
4. Vérifier que $\overrightarrow{IJ}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}5\\-8\\3\end{pmatrix}$.
5. Démontrer que les points A, B et C forment un plan.
6. Caractériser l'intersection des plans (ABC) et $\mathcal{P}''$.

Solution :Partie A

1. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants.
2. $\begin{cases} x &= \frac{5}{3}t-2 \\ y &= -\frac{8}{3}t+6 \\ z &= t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
3. Les vecteurs $\overrightarrow{u}(\frac{5}{3};-\frac{8}{3};1)$ et $\overrightarrow{u'}(5;-8;3)$ sont colinéaires et $N(3;-2;3)$.
   D'où le résultat.

Partie B

1. $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires donc il existe $t \in \mathbb{R}$...
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n} \neq 0$ d'où (AB) et $\mathcal{P}''$ sont sécants. $I(-2;6;0)$.
3. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{n} \neq 0$ donc $\overrightarrow{BC}$ et $\mathcal{P}''$ sont sécants. $J(0;\frac{14}{5};\frac{6}{5})$.
4. $\overrightarrow{IJ} = 0,4\overrightarrow{v}$.

5. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C forment un plan.
6. L'intersection est la droite (IJ).

Exercice 14/27

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On considère la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x &= -1-4t \\ y &= 1+2t \\ z &= 5+2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

On donne les points $A(1;1;0)$, $B(3;0;-1)$ et $C(7;-3;1)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. Les droites $\mathcal{D}$ et (AB) sont-elles coplanaires ?
3. Le point C appartient-il à la droite $\mathcal{D}$?

Solution :

1. $\begin{cases} x &= 2t+1 \\ y &= -t+1 \\ z &= -t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
2. Les vecteurs directeurs sont colinéaires donc les droites sont coplanaires.
3. $C \in \mathcal{D}$.

Exercice 15/27

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On considère la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x &= 2+3t \\ y &= 1-t \\ z &= 3-2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point $A(2;3;-1)$ sur la droite $\mathcal{D}$.

Solution :$H\left(\frac{11}{4};\frac{3}{4};\frac{5}{2}\right)$

Exercice 16/27

Préciser la nature géométrique de l'ensemble défini par : (S) $\begin{cases} x &= 1+2t \\ y &= t \\ z &= -2-t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Solution :Droite de vecteurs directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et passant par $A(1;0;-2)$.

Exercice 17/27 : *

Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base des vecteurs de l'espace.
2. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{t}\begin{pmatrix}-11\\-1\\-5\end{pmatrix}$?

Solution :

1. Les vecteurs ne sont pas coplanaires d'où le résultat.
2. $\vec{t}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$.

Exercice 18/27

L'espace est muni d'un repère orthonormé.
Dire dans chacun des cas suivants si les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont parallèles, confondues ou sécantes ou non coplanaires.
Dans le cas où les droites sont sécantes, déterminer les coordonnées du point d'intersection.

1. $\mathcal{D}\ :\begin{cases}x&=t\\y&=-1-t\\z&=3+t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$ et $\Delta\ :\begin{cases}x&=1-2t'\\y&=-2+2t'\\z&=5-2t'\end{cases}$ avec $t'\in\mathbb{R}$.
2. $\mathcal{D}\ :\begin{cases}x&=-3+2t\\y&=-1+t\\z&=2-3t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$ et $\Delta\ :\begin{cases}x&=-1+t'\\y&=-t'\\z&=-1-t'\end{cases}$ avec $t'\in\mathbb{R}$.
3. $\mathcal{D}\ :\begin{cases}x&=2-t\\y&=3+t\\z&=1-2t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$ et $\Delta\ :\begin{cases}x&=4+3t'\\y&=2-2t'\\z&=3+t'\end{cases}$ avec $t'\in\mathbb{R}$.

Solution :

1. Droites strictement parallèles
2. $H(-1;0;-1)$
3. Non coplanaires

Exercice 19/27

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
On note $\mathcal{D}$ la droite passant par les points $A(1;-2;-1)$ et $B(3;-5;-2)$.

1. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ est :

$$\begin{cases}x&=-3+2t\\y&=4-3t\\z&=1-t\end{cases}\quad,\ t\in\mathbb{R}.$$

2. On note $\mathcal{D}'$ la droite ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x & = 2 - k \\ y & = 1 + 2k \ , \quad k \in \mathbb{R}. \\ z & = k \end{cases}$$

   Montrer que les droite $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.

Solution :

1. Évident
2. Montrer que les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires et qu'il n'y a pas de point d'intersection.

Exercice 20/27

On définit les points $A(-1;1;3)$, $B(2;-1;-2)$, $C(0;1;-4)$ et $D(2;-1;-2)$ dans un repère orthonormé de l'espace.
Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Solution : Il faut montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires puis montrer qu'il existe un point d'intersection pour montrer que les droites sont perpendiculaires.

Exercice 21/27

On définit le point $A(4;5;7)$ et le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé de l'espace.
Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

Solution :$-x + 3y + 2z - 25 = 0$

Exercice 22/27

On définit les points $A(4;5;6)$, $B(-1;4;7)$ et $C(0;0;7)$ dans un repère orthonormé de l'espace.
Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à la droite (AB) et passant par C.

Solution :$-5x - y + z - 7 = 0$

Exercice 23/27 : *

On définit les points $A(1;2;-3)$, $B(4;-1;5)$ et $C(4;7;-6)$ dans un repère orthonormé de l'espace. Déterminer une équation du plan (ABC).

Solution :$-31x + 33y + 24z + 37 = 0$

Exercice 24/27 : Spécialité Mathématiques (sujet 0) - Bac 2024

Cliquer et faire l'exercice 4

Solution : Cliquer ici

Exercice 25/27 : Spécialité Mathématiques (Métropole France 1) - Bac 2023

Cliquer et faire l'exercice 4

Solution : Cliquer ici

Exercice 26/27 : Spécialité Mathématiques (Amérique du Nord 1) - Bac 2023

Cliquer et faire l'exercice 3

Solution : Cliquer ici

Exercice 27/27 : Spécialité Mathématiques (La Réunion 1) - Bac 2023

Cliquer et faire l'exercice 4

Solution : Cliquer ici