Version 240826

2024/2025

Principe de récurrence

Le raisonnement par récurrence est comme une suite de dominos. Si la propriété est vraie au rang n_0 (i. e. le premier domino de numéro 0 tombe) et si sa véracité au rang n implique celle au rang n + 1 (i. e. la chute du domino numéro n fait tomber le domino numéro n + 1) alors la propriété est vraie pour tout entier (i. e. tous les dominos tombent).

I Le principe de récurrence

Théorème

Soit $P(n)$ une propriété qui dépend d'un entier naturel n et $n_0 \in \mathbb{N}$ un entier naturel fixé.
On suppose que la propriété P satisfait les deux conditions suivantes :

Initialisation :

$P(n_0)$ est vraie.

Hérédité :

Quel que soit l'entier $n \geq n_0$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.

Alors, pour tout entier $n \geq n_0$ $P(n)$ est vraie.

Définition

On dit qu'une propriété est héréditaire à partir d'un certain rang si :

Propriété vraie au rang k $\Longrightarrow$ Propriété vraie au rang k+1

Exemple

Pour tout entier naturel n non nul, on considère la proposition $P(n)$ suivante : $2^n > n$.

Initialisation :

rang $n = 1$ (car n non nul).
$2^1 = 2 > 1$ La propriété est donc vraie au rang $n = 1$.

Hérédité :

Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang n et montrons que cela implique $P(n+1)$ vrai.

$$\begin{aligned}
P(n) \text{ vraie } &\iff 2^n > n \\
&\iff 2^n \times 2 > n \times 2 \\
&\iff 2^{n+1} > 2n \\
&\Longrightarrow 2^{n+1} > n + n \geq n + 1 \\
&\Longrightarrow 2^{n+1} > n + 1
\end{aligned}$$

Conclusion :

$P(n)$ vraie $\Longrightarrow P(n+1)$ vraie. La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 1$.
D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n > 0$.
La propriété est ainsi démontrée.

L'initialisation est **indispensable** dans une démonstration par récurrence.

Exemple

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0,\ u_{n+1} = \sqrt{7u_n}$.
Démontrer les inégalités suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leq 7$$

Exemple

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.
Démontrer que la suite est croissante.

Propriété

L'inégalité de Bernouilli : Soit un nombre a positif

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (1+a)^n \geq 1 + na$$

Démonstration

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$ suivante : $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Initialisation :

rang $n = 0$.
$(1+a)^0 = 1 \geq 1 + 0 \times a$ La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité :

Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang n et montrons que cela implique $P(n+1)$ vrai.

$$\begin{aligned}
P(n) \text{ vraie } &\iff (1+a)^n \geq 1 + na \\
&\iff (1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a) \\
&\iff (1+a)^{n+1} \geq 1 + a + na + na^2 \\
&\implies (1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a \\
&\implies (1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a
\end{aligned}$$

Conclusion :

$P(n)$ vraie $\implies P(n+1)$ vraie. La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 0$.
D'après le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel.
La propriété est ainsi démontrée.