Version 250213

2024/2025

# Produit scalaire

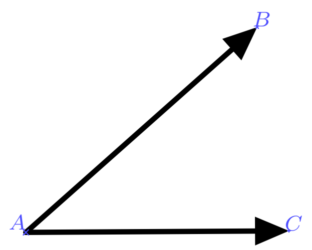
Le produit scalaire a de multiples applications.
En physique, par exemple, il est utilisé pour modéliser le travail d'une force.
Dans ce cours nous allons voir quelques unes de ses applications, en particulier aux relations métriques dans le triangle.

## I Définition et propriétés

**Définition**

Voici deux définitions importantes pour démarrer :

- Soient deux points $A$ et $B$.
  La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, notée $AB = ||\overrightarrow{AB}||$ correspond à la longueur du segment $[AB]$.
- Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs.
  On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AC}$, et l'on note $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, **le nombre réel** défini par : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$




**Propriété**

D'après la défintion du produit scalaire :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = ||AB||^2 = AB^2$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \to \forall \overrightarrow{u}, \quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u} = 0$$

**Exemple**

a. Soit un triangle équilatéral $ABC$ de côté 3.
   Faire une figure.
   Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
b. Soit $I$ le milieu de $[AB]$.
   Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC}$

**Propriété**

On a les propriétés suivantes pour le produit scalaire :

- Symétrie : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$
- Bilinéarité : $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$
- Bilinéarité : $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{kv}) = k\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$.
- Id. rem $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$
- Id. rem $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$
- Id. rem $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2$.

**Exemple**

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de normes respectives 3 et 4 et tels que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 1$.
Calculer :

a. $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$ b. $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$ c. $-2\overrightarrow{v}.(3\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$

# II Notion de produit scalaire et d'orthogonalité

## II.1 Projeté orthogonal

**Propriété**

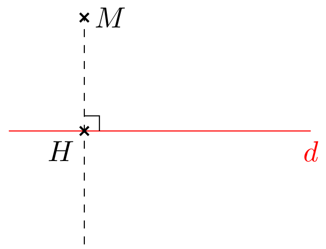
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

**Exemple**

Démontrer la propriété ci-dessus.

**Définition**

Soit une droite $d$ et un point $M$ du plan. Le projeté orthogonal du point $M$ sur la droite $d$ est le point d'intersection $H$ de la droite $d$ avec la perpendiculaire à $d$ passant par $M$.



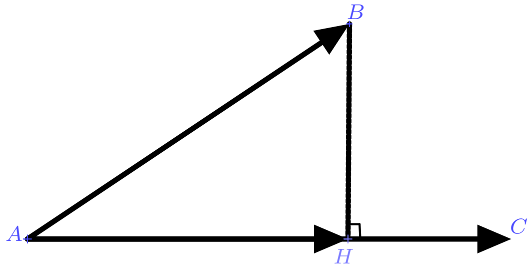

**Propriété**

Le projeté orthogonal du point $M$ sur la droite $d$ est le point de la droite $d$ le plus proche du point $M$.

**Propriété**

Soient $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ deux vecteurs non nuls.
$H$ est le projeté orthogonal du point $B$ sur la droite $(AC)$.
On a alors :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}$$




**Exemple**

Démontrer la propriété précédente.

**Exemple**

Soit un carré $ABCD$ de côté 4.

a. Faire une figure.

b. Calculer les produits scalaires :

(a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ (b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ (c) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}$

# III Produit scalaire dans un repère orthonormé.

**Propriété**

Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs.

On a : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$ et $||\overrightarrow{u}||^2 = x^2 + y^2$

**Exemple**

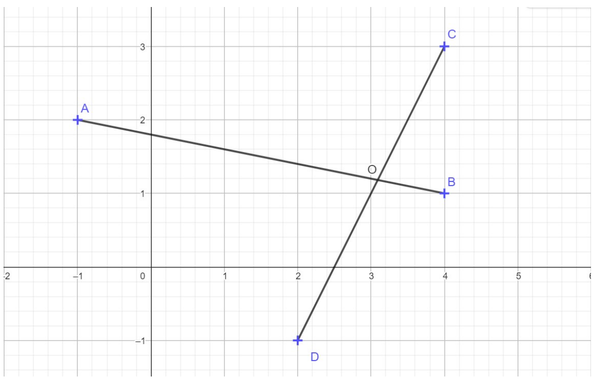
Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$. Calculer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$.

**Exemple**

On considère les points suivants $A(2,1)$, $B(5,3)$, $C(1,4)$, $D(5,-2)$. Démontrer que les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont perpendiculaires.

**Exemple**

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BOD}$ en calculant le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ de deux façons. On pourra lire les coordonnées des points $A$, $B$, $C$ et $D$ dans le repère ci-contre.

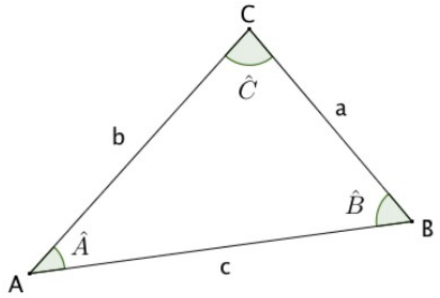


## IV Théorème d'Al Kashi

**Théorème**

Dans un triangle $ABC$, on a, avec les notations de la figure :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$




**Exemple**

On considère un triangle $ABC$ tel que $AC = 6cm$, $AB = 4cm$ et $\widehat{CAB} = 60°$.

a. Faire une figure.

b. Calculer la longueur $BC$. On donnera une valeur arrondie au dixième.

**Exemple**

On considère un triangle $ABC$ tel que $AC = 5cm$, $AB = 6cm$ et $BC = 4cm$.

a. Faire une figure.

b. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.