Version 241202

2024/2025

Probabilités conditionnelles

I Conditionnement par un événement

Exemple

Un essai de laboratoire porte sur 35 cobayes et 15 rats. Après 5 jours, 40 % des cobayes sont malades ainsi que 20 % des rats.

a. Compléter le tableau ci-contre par des pourcentages.

b. Quel est, arrondi au dixième, le pourcentage de rats parmi les animaux sains ?

	Cobayes	Rats	Total
Malade			
Sain			
Total			100 %

On choisit un animal au hasard. On note les événements M :"l'animal est malade", et C "l'animal est un cobaye".

a. Quelle est la probabilité que ce soit un cobaye malade ?

b. On constate que l'animal choisi est un cobaye. Quelle est la probabilité, notée $P_C(M)$, qu'il soit malade ?

c. Imaginer une relation reliant les probabilités $P(C \cap M)$, $P_C(M)$ et $P(C)$.

Définition

Soit A et B deux événements, avec $P(A) \neq 0$.
La probabilité conditionnelle de de l'événement B sachant A, notée $P_A(B)$, est définie par

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exemple

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Soit A l'événement " Le résultat est un pique ". Soit B l'événement " Le résultat est un roi ".

a. Définir l'événement $A \cap B$

b. Calculer $P(A)$ et $P(A \cap B)$

c. Donner la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique

Exemple

Un sac contient 50 boules, dont 20 boules rouges et 30 boules noires, où il est marqué soit ” Gagné ” ou soit ” Perdu ” Sur 15 boules rouges, il est marqué Gagné. Sur 9 boules noires, il est marqué Gagné. On tire au hasard une boule dans le sac. Soit R l'événement ” On tire une boule rouge ”. Soit G l'événement ” On tire une boule marquée Gagné ”.

a. Définir l'événement $R \cap G$

b. Calculer $P(R)$ et $P(R \cap G)$

c. Donner la probabilité qu'on tire une boule marquée Gagné sachant qu'elle est rouge.

Exemple

La probabilité qu'un jeune réussisse l'examen du permis de conduire l'année de ses 18 ans est de 0,625 et celle qu'il soit reçu au baccalauréat cette même année est de 0,82.
De plus, la probabilité d'être à la fois reçu au baccalauréat et à l'examen du permis de conduire la même année est de 0,56.

a. Calculer la probabilité qu'un jeune soit reçu à au moins un des deux examens.

b. En déduire la probabilité qu'il ne soit reçu à aucun des deux examens.

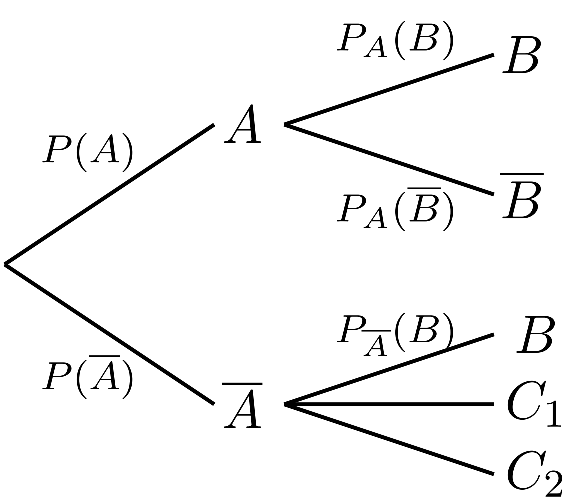
c. Déterminer la probabilité qu'un jeune réussisse au baccalauréat sachant qu'il a déjà eu son permis la même année.

Propriété

La probabilité conditionnelle suit les règles et lois de probabilités vues pour les probabilités simples. On a en particulier :

- $0 \leq P_A(B) \leq 1$
- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$
- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

II Arbre pondéré



Règle 1
La somme des probabilités issues d'un noeud est égale à 1.

Règle 2
Sur chaque branche, on inscrit la probabilité conditionnelle : probabilité de l'événement de droite sachant celui de gauche.

Règle 3
Un chemin correspond à l'intersection des événements.

Sa probabilité est le produit des probabilités.

Règle 4
La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui mènent à cet événement.

Exemple

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85% des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95% des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour toute la population et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note respectivement M et T les événements « Être porteur de la maladie » et « Avoir un test positif ».

a. Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?
b. Si le test du bovin est positif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

Formule des probabilités totale :

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

Remarque

Exemple

Tous les élèves d'une promotion ont passé un test de certification en anglais.

- 80% ont réussi le test.
- Parmi ceux qui ont réussi le test, 95% le passaient pour la 1ère fois.
- Parmi ceux qui ont échoué au test, 2% le passaient pour la 1ère fois.

On considère les événements R : " l'élève a réussi au test ", et F : "l'élève a passé le test plusieurs fois ".

a. Traduire l'énoncé en termes de probabilité.
b. Dresser un arbre pondéré décrivant la situation.
c. Calculer la probabilité qu'un élève choisi au hasard ait passé le test pour la 1ère fois et l'ait réussi.
d. Déterminer la probabilité qu'un élève choisi au hasard ait passé plusieurs fois le test.
e. On choisit au hasard un élève ayant passé plusieurs fois le test. Quelle est la probabilité qu'il ait réussi ?

III Indépendance

On dit que deux événements A et B sont indépendants lorsque :

$$P_A(B) = P(B).$$

" Savoir que l'événement A est arrivé ne change pas la probabilité de l'événement B."
Si A et B sont indépendants, on a aussi $P_B(A) = P(A)$.

Ne pas confondre indépendance et incompatibilité :
A et B sont incompatibles lorsque $A \cap B = \emptyset$

Définition

Exemple

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit R l'événement " On tire un roi ".
Soit T l'événement " On tire un trèfle "

a. Montrer que R et T sont des événements indépendants.

b. On ajoute deux jokers au jeu de cartes. Les événements R et T sont-ils indépendants ?

Exemple

Dans une population, un individu est atteint par la maladie a avec une probabilité égale à 0,005 et par la maladie b avec une probabilité égale à 0,01.
On choisit au hasard un individu de cette population.
Soit A l'événement " L'individu a la maladie a ".
Soit B l'événement " L'individu a la maladie b ".
On suppose que les événements A et B sont indépendants

a. Calculer la probabilité qu'un individu soit atteint par les deux maladies.

b. Calculer $P(A \cup B)$ et interpréter le résultat.