Version 250204

2024/2025

Polynôme de degrès 3

L'objectif de ce chapitre est d'étudier la fonction cube et les fonctions polynômes de degré 3. Pour modéliser le tracé des rails d'une montagne russe, on peut être amené à utiliser la courbe représentative d'une fonction polynomiale de degré 3. Une telle modélisation permet au constructeur de déterminer, par exemple, l'altitude maximale atteinte par cette attraction, ou bien encore la pente à laquelle les utilisateurs seront soumis durant toute sa durée.

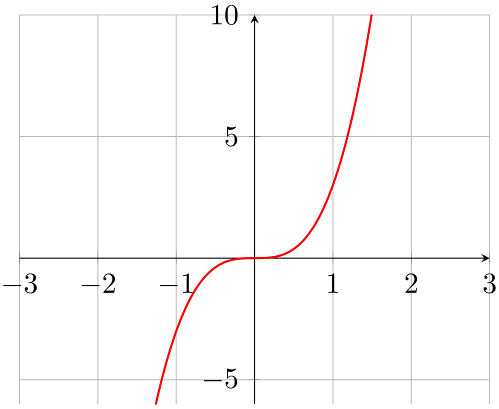
I Définition et représentation graphique

Définition

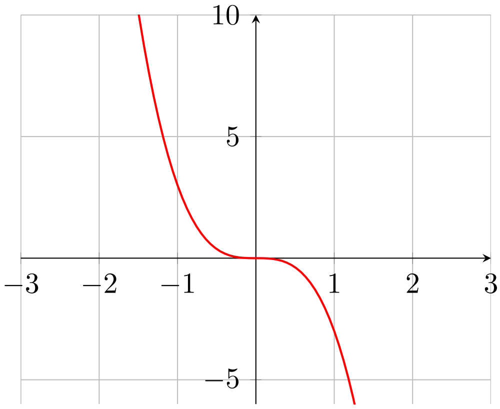
Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ax^3$ ou $x \mapsto ax^3 + b$ sont des fonctions polynômes de degré 3.
Les coefficients a et b sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Pour un polynôme de la forme $y = ax^3$, on a les représentations graphique suivantes :

$a > 0$

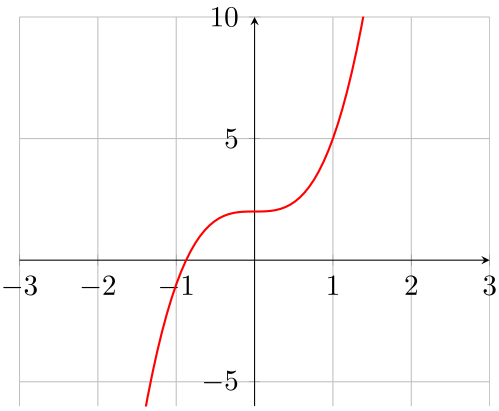


$a < 0$

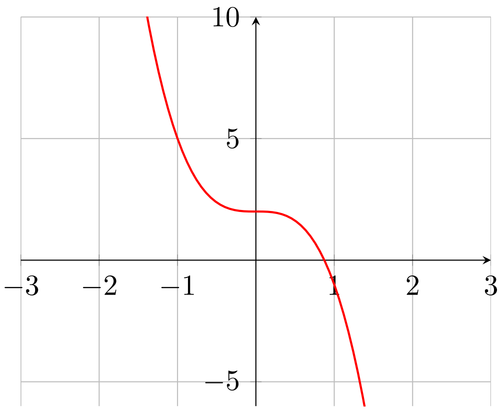


Pour un polynôme de la forme $y = ax^3 + b$, on a les représentations graphique suivantes :

$a > 0$



$a < 0$



Propriété

Soit f une fonction polynôme de degré 3, telle que $f(x) = ax^3 + b$.

- Si $a > 0$: la fonction est strictement croissante.
- Si $a < 0$: la fonction est strictement décroissante.

II Forme factorisée d'une fonction polynôme de degré 3

Définition

Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ sont des fonctions polynômes de degré 3.
Les coefficients a, x_1, x_2 et x_3 sont des réels avec $a \neq 0$.
L'équation $f(x) = 0$ admet alors 3 solutions, $x = x_1$, $x = x_2$ et $x = x_3$. Ces solutions sont appelées **racines** du polynôme.

Exemple

La fonction f définie par $f(x) = 5(x - 1)(x - 4)(x + 3)$ est une fonction polynôme de degré 3 sous sa forme factorisée.
La forme développée est $f(x) = 5x^3 - 10x^2 - 55x + 60$. Les racines de ce polynôme sont $x = 1$, $x = 4$ et $x = -3$.

Exemple

Étudier le signe de la fonction f polynôme de degré 3 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2(x + 1)(x - 2)(x - 5)$$

III Équation de la forme $x^3 = c$

Propriété

L'équation $x^3 = c$, avec c positif, possède une unique solution $\sqrt[3]{c}$
Cette solution peut également se noter $c^{\frac{1}{3}}$.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $x^3 = 27$

b. $2x^3 - 6 = 16$