LABOR ET DILECTIO PAU 1884

2024/2025

Orthogonalité/distance

Euclide (env. 330 av JC) fut pendant, deux millénaires, considéré comme la référence unique en géométrie tant son ouvrage *Les éléments* était complet et révolutionnaire pour l'époque. Certes, il avait repris la plupart des résultats connus alors mais il avait complété par des découvertes personnelles. Il avait surtout su mettre de l'ordre dans la connaissance mathématique et la baser sur des axiomes. Plusieurs des théorèmes qui l'énonce concernent l'orthogonalité et l'on peut dire que c'est lui qui a donné toute son importance à l'angle droit.

I Produit scalaire

I.1 Produit scalaire de deux vecteurs

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs de l'espace, A, B et C trois points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. Soit $\mathcal{P}$ un plan contenant les points A, B et C. On appelle **produit scalaire** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, et on note $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ calculé dans le plan $\mathcal{P}$. Par conséquent :

- Si l'un des vecteurs $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul alors le produit scalaire est nul.
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$

Propriété

Produit scalaire de vecteurs colinéaires

- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs colinéaires et de même sens alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}||$.
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs colinéaires et de sens contraire alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}||$.

En particulier $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2$.

I.2 Propriétés fondamentales, identités remarquables

Théorème

Symétrie

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$

Bilinéarité

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs et k un nombre réel. Alors :

- $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$
- $\overrightarrow{u} \cdot (k\overrightarrow{v}) = k(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$
- $(k\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = k(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$

Propriété

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.

$$||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$$

Démonstration

On utilise la bilinéarité du produit scalaire :

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}$$

On utilise maintenant la symétrie du produit scalaire :

$$= ||\vec{u}||^2+||\vec{v}||^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

Propriété

Formules de polarisation

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2\right)$

Démonstration

La première formule s'obtient à partir de la formule

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2+||\vec{v}||^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

La deuxième s'obtient de la même façon en utilisant $\vec{u}$ et $-\vec{v}$.

II Orthogonalité

II.1 vecteurs orthogonaux

Définition

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ des vecteurs de l'espace, A, B et C trois points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si $\widehat{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$. Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de l'espace.

Théorème

Caractérisation de l'orthogonalité de deux vecteurs

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux si et seulement si } \vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

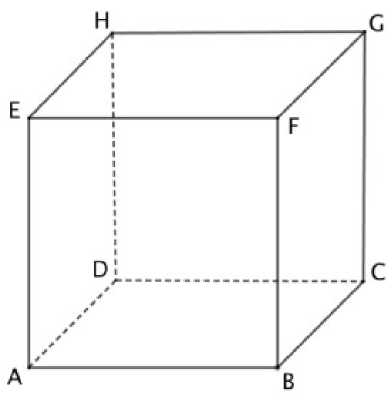
Exemple

ABCDEFGH est un cube d'arête a.
Calculer les produits scalaires :

a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DG}$

b. $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{HD}$

c. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{GF}$



Exemple

Soit un tétraèdre régulier ABCD d'arêtes de longueur l.
Démontrer que les arêtes $[AD]$ et $[BC]$ sont orthogonales.

II.2 Orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan

Définition

- Deux droites sont orthogonales si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.
- Une droite D est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ lorsqu'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de D est orthogonal aux deux vecteurs directeurs d'une base $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ de $\mathcal{P}$.

Propriété

- Si deux droites sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.
- Si une droite D est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$, alors elle est orthogonale à toute droite de $\mathcal{P}$. Inversement, si D est orthogonale à deux droites sécantes de $\mathcal{P}$, alors elle est orthogonale à $\mathcal{P}$.
- Si deux plans sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre

II.3 Vecteur normal à un plan

Définition

Un vecteur non nul est dit **normal** à un plan $\mathcal{P}$ lorsqu'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la direction de $\mathcal{P}$.

Propriété

Si $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, alors il est orthogonal à tout vecteur de la direction de $\mathcal{P}$, c'est à dire à tout vecteur de la forme $\overrightarrow{MN}$, M et N étant deux points de $\mathcal{P}$.

Théorème

Le plan $\mathcal{P}$ qui passe par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.

Exemple

ABCDEFGH est un cube.
Démontrer que le vecteur CF est normal au plan (ABG).

Exemple

Dans un repère orthonormé, on donne :
$A(1, 2, -2)$, $B(-1, 3, 1)$ $C(2, 0, -2)$
Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

III Calcul en repère orthonormé

III.1 Repère orthonormé de l'espace

Définition

Un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est dit orthonormé si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux et si $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = ||\vec{k}|| = 1$.
Le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est appelé base orthonormée de vecteurs de l'espace.
Tous les résultats de la géométrie plane s'étendent à l'espace par adjonction d'une troisième coordonnée.

Définition

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère. Au vecteur $\vec{u}$ associons le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
Par définition, les coordonnées de $\vec{u}$ sont les coordonnées (x, y, z) de M. Ainsi, tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit de manière unique : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

III.2 Expressions analytiques en repère orthonormé

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On suppose que les points A et B ont pour coordonnées (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B).

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.
- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

Théorème

Produit scalaire, norme et distance
Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$, et si les points A et B ont pour coordonnées (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' \quad \text{et} \quad ||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

En particulier, $d(A, B) = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Démonstration

$u \cdot v = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) = xx'\vec{i} \cdot \vec{i} + xy'\vec{i} \cdot \vec{j} + xz'\vec{i} \cdot \vec{k} + yx'\vec{j} \cdot \vec{i} + yy'\vec{j} \cdot \vec{j} + yz'\vec{j} \cdot \vec{k} + zx'\vec{k} \cdot \vec{i} + zy'\vec{k} \cdot \vec{j} + zz'\vec{k} \cdot \vec{k} = xx' + yy' + zz'$

Les autres propriétés sont des conséquences directes.

Exemple

Soit le cube ABCDEFGH.
On considère le repère de l'espace $(C; \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CG})$.
I est le milieu du segment $[BF]$.
Les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{DI}$ sont-ils orthogonaux ?

IV Projection orthogonales et distances

IV.1 Projeté orthogonal d'un point sur une droite ou un plan

Définition

- Soit A un point de l'espace et D une droite de l'espace de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. On dit que le point H est le **projeté orthogonal** de A sur D lorsque $H \in D$ et $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à D, c'est à dire à $\overrightarrow{u}$.
- Soit A un point de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan. On dit que le point H est le **projeté orthogonal** de A sur $\mathcal{P}$ lorsque $H \in \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à $\mathcal{P}$.

Propriété

Interprétation géométrique du produit scalaire
Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace, A, B et C trois points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. Alors :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

Où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

IV.2 Distance d'un point à un plan

Définition

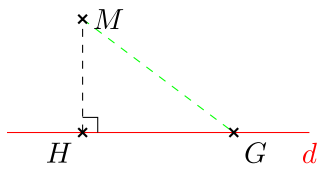
Soit $\mathcal{P}$ un plan et soit M un point de l'espace. La distance de M au plan $\mathcal{P}$ est la plus courte distance de M à un point de $\mathcal{P}$, noté $d(M, \mathcal{P})$.

Propriété

Le projeté orthogonal du point M sur la droite d est le point de la droite d le plus proche du point M.

Démonstration

Soit H le projeté orthogonal du point M sur la droite d.
Supposons qu'il existe un point G sur la droite d plus proche de M que H.



D'après la supposition de départ, $HM \geq GM$.
La fonction carré conserve l'ordre (croissance) donc $HM^2 \geq GM^2$
Or le triangle MHG est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore : $HM^2 + HG^2 = MG^2$ donc $HM^2 = MG^2 - HG^2$.
Donc d'après la supposition HG^2 doit être négatif. **Cela est impossible car un carré est toujours positif**.
Nous arrivons à une contradiction donc la supposition de départ était fausse.
Il n'existe donc pas de point $G \neq H$ tel que $MG \leq MH$

Théorème

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace de vecteur normal $\overrightarrow{n}$, M un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur le plan $\mathcal{P}$. On a :

$$d(M, \mathcal{P}) = d(M, H) = \frac{|\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{n}|}{||\overrightarrow{n}||}$$

Démonstration

Soit un point M de l'espace et H son projeté orthogonal sur le plan $\mathcal{P}$.

- Montrons tout d'abord que $d(M, \mathcal{P}) = d(M, H)$.
  On considère un point N du plan $\mathcal{P}$, le triangle MHN est rectangle en H, par conséquent, d'après le théorème de Pythagore :
  $$NM^2 = MH^2 + NH^2$$
  En particulier, $MN^2 \geq MH^2$, soit $MN \geq MH$. On en déduit que H est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M.
- Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Déterminons l'expression de $d(M, \mathcal{P})$.
  Les vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires et par conséquent :
  $$|\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{n}| = MH \times ||\overrightarrow{n}|| \times |\cos(\overrightarrow{MH}; \overrightarrow{n})| = MH \times ||\overrightarrow{n}||$$
  D'où le résultat.

Exemple

Soit un cube ABCDEFGH. On considère le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

a. Calculer les coordonnées du projeté orthogonal I du point G sur le plan (BDE).

b. En déduire la distance GI du point G au plan (BDE).