Notion de fonction

I Définition et notation

Définitions

Soit D une partie de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

Fonction

Une fonction f définie sur D associe à tout nombre réel x de D un unique nombre réel, noté $f(x)$.

Ensemble de définition

D est appelé l'ensemble de définition de la fonction f : c'est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles f(x) est définie (ou existe)..

On note :

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Et on lit "La fonction f, définie pour x appartenant à D ($x \in D$), qui à un nombre x associe le nombre $f(x)$".

I.1 Image, antécédent

Exemple

Pour la fonction $f(x) = x^2 + 2$:

$$f(5) = 27 \text{ et } f(-1) = 3$$

On dit que :

- l'image de 5 par la fonction f est 27.
- Un antécédent de 27 par la fonction f est 5.

$$5 \longmapsto 27$$

Antécédent de 27 Image de 5

Remarque

- Un nombre possède une unique image.
- Cependant, un nombre peut posséder plusieurs antécédents.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x} + 1$

a. **Compléter** le tableau de valeurs :

x	4	10,24	16	20,25
$\sqrt{x}+1$				

b. Compléter :

(a) L'image de 4 par f est ......

(b) Un antécédent de 5 par f est ......

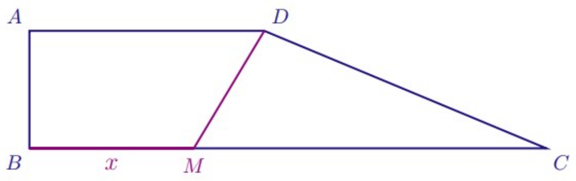
(c) f : ..... $\longmapsto 4,2$

(d) $f(20,25) =$ .....

I.2 Quelques exercices

a. **Exercice 1**

$ABCD$ est un trapèze rectangle tel que $AB = 5$, $AD = 10$ et $BC = 22$. M est un point du segment $[BC]$.



On pose $x = BM$. Soit f la fonction telle que $f(x) = DM$.
On ne cherche pas ici à donner l'expression algébrique $f(x)$ de la fonction f en fonction de x.

(a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

(b) Déterminer $f(0)$, $f(10)$ et $f(22)$.

(c) Détailler comment varie $f(x)$ lorsque x augmente.
Représenter graphiquement ces détails à l'aide d'un graphique et/ou d'un tableau représentant les variations.

(d) 7 a-t-il un antécédent par f ?

b. **Exercice 2**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 12x + 11$.

(a) Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = (x - 11)(x - 1)$.

(b) Déterminer l'image de 3 par la fonction f.
Déterminer de même l'image de -2 par f.

(c) Déterminer les antécédents éventuels de 0 par f.
Déterminer de même les antécédents éventuels de 11 par f.

c. **Exercice 3**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 6x - 20$.

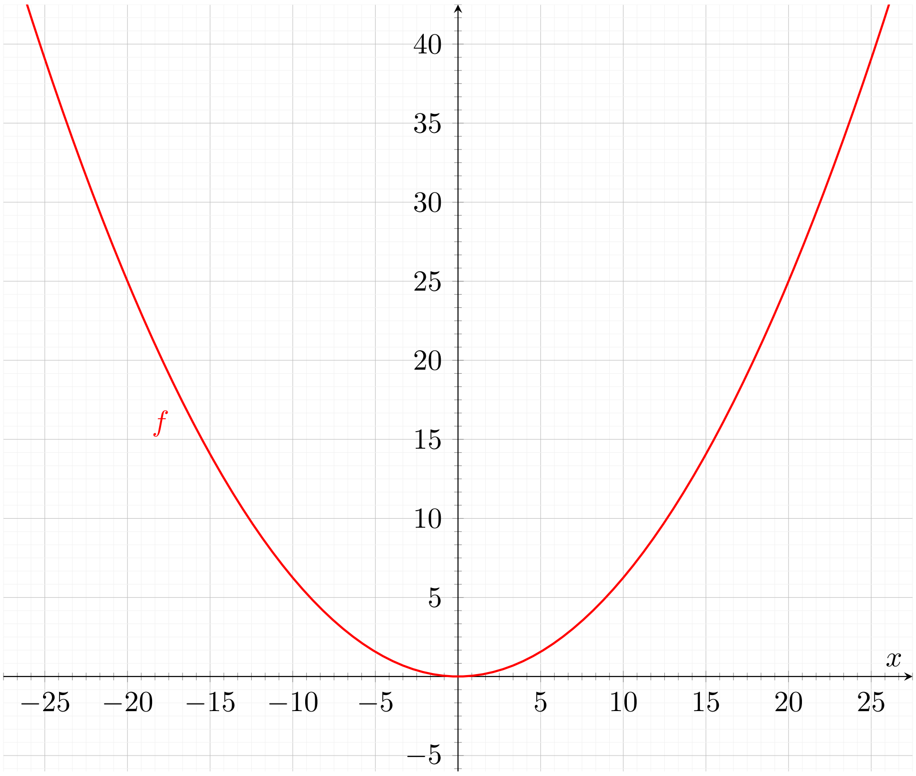
(a) Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = 2(x + 2)(x - 5)$.

(b) Déterminer l'image de -2 par la fonction f.
Déterminer de même l'image de -3 par f.

(c) Déterminer les antécédents éventuels de -20 par f.
Déterminer de même les antécédents éventuels de 0 par f.

II Représentation graphique d'une fonction

Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur D :



On peut dire que l'ensemble des points de coordonnées $(x;y)$ avec $y = f(x)$ et $x \in D$ définissent la courbe représentative de la fonction f.
On dira que $y = f(x)$ est l'équation de la courbe.

Définition

La courbe d'équation $y = f(x)$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x;y)$ vérifient $y = f(x)$ avec $x \in D$.

II.1 Exercice

a. Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$.
Indiquer les points qui appartiennent à $\mathcal{C}_f$:
$A(0;2)$; $B(1;1)$; $C(-2;4)$; $D(-3;29)$; $E(10;172)$; $F(125;30\,877)$.
Placer ces points dans un repère et tracer une courbe $\mathcal{C}_f$ possible.

b. Soit la fonction g définie par l'expression $g(x) = \dfrac{x+6}{x-2}$.
Indiquer les points qui appartiennent à $\mathcal{C}_f$:
$A(0;-3)$; $B(1;-7)$; $C(-1;-2,5)$; $D(2;8)$; $E(-2;-1)$; $F(6;3)$; $G(3;10)$; $H(4;5)$
Placer ces points dans un repère et tracer une courbe $\mathcal{C}_g$ possible.

III Variation d'une fonction

Un des objectifs principaux de l'étude d'une fonction est de déterminer son **sens de variation** et ses extremums.

Définition

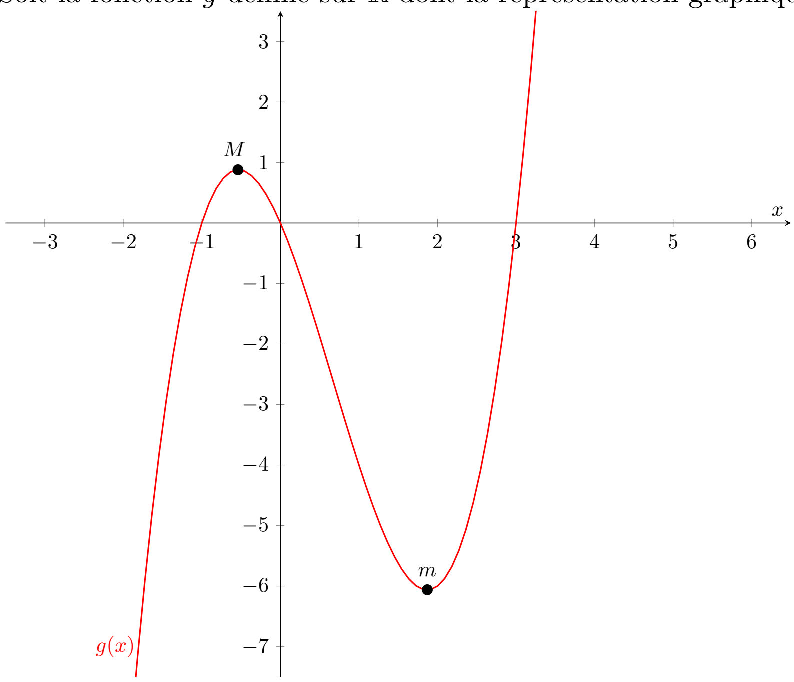
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. a et b deux nombres réels de I.
Dire que f admet **un maximum** M en a, tel que $f(a) = M$, sur I signifie que pour tout nombre réel x de l'intervalle I, $f(x) \leq M$

Dire que f admet **un minimum** m en b, tel que $f(b) = m$, sur I signifie que pour tout nombre réel x de l'intervalle I, $f(x) \geq m$

Un **extremum** est soit un minimum, soit un maximum.

Exemple

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique et donnée ci-dessous :



g admet un maximum M sur l'intervalle $[-1, 0]$ atteint en $(-0, 5; 1)$.
g admet un minimum m sur l'intervalle $[0, 3]$ atteint en $(2; -6)$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
- Dire que f est **croissante** sur I signifie que pour tous réels a et b de I : si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$.
- Dire que f est **décroissante** sur I signifie que pour tous réels a et b de I : si $a < b$ alors $f(a) \geq f(b)$
- Dire que f est **constante** sur I signifie que pour tous réels a et b de I : $f(a) = f(b)$
- Dire que f est **monotone** sur I signifie que f est soit croissante sur I, soit décroissante sur I.

la fonction g définie précédemment. g est croissante sur $]-\infty; -0, 5]$, décroissante sur $[-0, 5; 2]$ et croissante sur $[2; +\infty[$.

Définition

Un tableau de variations résume les variations d'une fonction en faisant apparaître les intervalles où elle est monotone et les éventuels extremums

Pour la fonction g, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-0.5		2		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

III.1 Exercices

a. **Exercice 1**
Soit g la fonction définie sur $[-10; 10]$ par l'expression $g(x) = 2x - 3$.
Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_g$ à l'aide d'une calculatrice (ou ordinateur...) et donner le tableau de variation correspondant.

b. **Exercice 2**
Soit h la fonction définie sur $[0; 15]$ par l'expression $h(x) = x^2 + 6x - 3$
Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_h$ à l'aide d'une calculatrice (ou ordinateur...) et donner le tableau de variation correspondant.

c. **Exercice 3**
Soit k la fonction définie sur $[-4; 7]$ par l'expression $k(x) = x^3 - 3x^2 + 2$
Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_k$ à l'aide d'une calculatrice (ou ordinateur...) et donner le tableau de variation correspondant.

IV Taux de variation

Définition

Taux de variation (variation relative) :

Le taux de variation de la fonction f entre a et b est le nombre : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Variation absolue :

la variation absolue de f entre M_1 et M_2 est $y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$.

Propriété

- Le taux de variation est le coefficient directeur de la droite (M_1M_2)
- Si pour tous réels distincts x_1 et x_2, le taux de variation de f entre x_1 et x_2 est positif, alors f est croissante
- Si pour tous réels distincts x_1 et x_2, le taux de variation de f entre x_1 et x_2 est négatif, alors f est décroissante.

Exemple

On considère la fonction carré $f : x \longmapsto x^2$ et la fonction cube, $g : x \longmapsto x^3$, définies sur $\mathbb{R}$.
Calculer les taux de variation de f et de g, puis les comparer entre :

a. 0 et 1 b. 0 et 2 c. 0 et 4 d. -1 et 0 e. -2 et -1

V Les fonctions affines

Définition

Une fonction affine f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ où m est le **coefficient directeur** et p est **l'ordonnée à l'origine** de la droite représentative.
Lorsque $p = 0$, la fonction f définie par $f(x) = mx$ est **une fonction linéaire**.

La représentation graphique d'une fonction affine est **une droite** (passant par l'origine si la fonction est linéaire).
Dans le cas d'une fonction constante, cette droite est parallèle à l'axe des abscisses.

Propriété

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.
Si $m > 0$, f est croissante sur $\mathbb{R}$.
Si $m < 0$, f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
Si $m = 0$, f est constante sur $\mathbb{R}$

Exemple

Construire le tableau de variations et le tableau de signe des fonctions suivantes :

a. $f : x \longmapsto 2x + 4$ b. $g : x \longmapsto x - 4$ c. $h : x \longmapsto -6x - 3$

Déterminer l'expression de la fonction affine dont la courbe passe par les points $A(-2; -2)$ et $B(1; 7)$.

Exercice

Donner les tableaux de signes des expressions affines :

a) $3x + 6$ b) $2x + 8$ c) $-2x + 4$ d) $-6x - 3$ e) $x + 2$ f) $-x + 7$

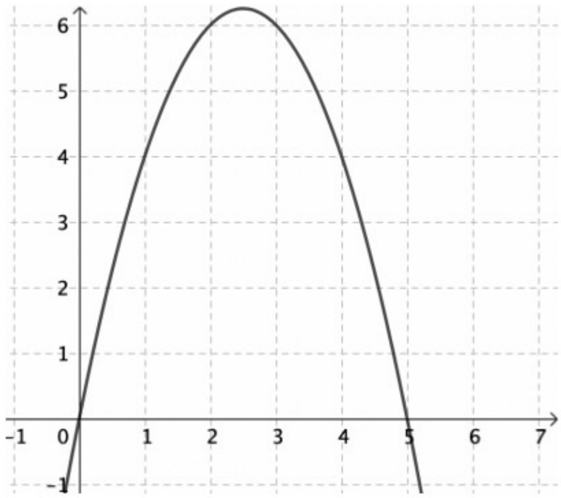
g) $2x$ h) x i) $-x$ j) $3 - 6x$ k) $2 + 3x$ l) $-8 - 3x$

VI Résolution graphique d'équations et d'inéquations

VI.1 Résolution graphique d'équations

Exemple

On a représenté la courbe de la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.
Résoudre graphiquement l'équation $5x - x^2 = 4$.



- Par lecture graphique, les solutions obtenues sont approchées.
- L'équation $f(x) = 7$, par exemple, ne semble pas avoir de solution car la courbe représentée ne possède pas de point d'ordonnée 7.
- Graphiquement, on ne peut pas être certain que les solutions qui apparaissent sont les seules. Il pourrait y en avoir d'autres au-delà des limites de la représentation graphique tracée.

Remarque

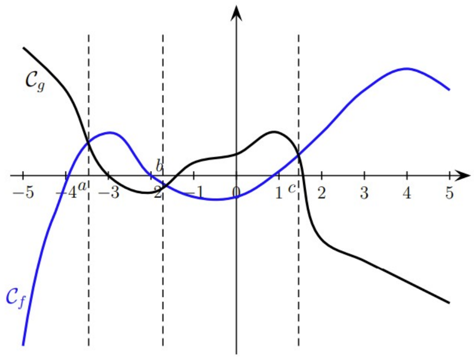
VI.2 Résolution graphique (et un peu algébrique) d'inéquations

Exemple

Dans la méthode précédente, on a représenté la courbe de la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.
Résoudre graphiquement l'inéquation $5x - x^2 > 4$.

Définition

Étudier la position relative de deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, c'est déterminer quelle courbe est au-dessous ou au-dessus de l'autre.
Par exemple pour des fonctions f et g définies sur $[-5; 5]$, telles que :



On a,

- $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $[-5; a]$ et sur $[b; c]$
- $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $[a; b]$ et sur $[c; 5]$.

Propriété

- $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$
  $\iff f(x) \leq g(x)$
  $\iff f(x) - g(x) \leq 0$
  $\iff d(x) = f(x) - g(x)$ négatif
- $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$
  $\iff f(x) \geq g(x)$
  $\iff f(x) - g(x) \geq 0$
  $\iff d(x) = f(x) - g(x)$ positif

Ainsi, étudier la position relative des deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ est équivalent à étudier le signe de la différence $d(x) = f(x) - g(x)$.

VI.3 Exercices

Exercice

Soit $f(x) = -2x - 2$ et $g(x) = 6x - 2$

a. Représenter graphiquement les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_g$ et étudier graphiquement leur position relative.

b. Étudier précisément, algébriquement, leur position relative.