Exercices

Nombres complexes 2

Exercice 1/30

Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

1. $z = 1 + i$
2. $z = 3 - 2i$
3. $z = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$
4. $z = -2 - 5i$
5. $z = -4 + 5i$
6. $z = -\sqrt{5} - 2i\sqrt{3}$

Exercice 2/30

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes $z_A = 3 + 2i$, $z_B = -i$ et $z_C = -2 + i$.

1. Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
3. Déterminer l'affixe du centre I du parallélogramme $ABCD$.

Exercice 3/30

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = 2 + i$, $z_B = 1 + 3i$, $z_c = -2 + 2i$ et $z_D = -1$.

1. Calculer z_{AB} et z_{DC}.
2. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

Exercice 4/30

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C d'affixes respectives : $z_A = 1 + i$, $z_B = -2i$, $z_c = -2$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre A passant par B.

1. Calculer le rayon R du cercle $\mathcal{C}$.
2. Vérifier que le point C appartient au cercle $\mathcal{C}$.

Exercice 5/30

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B d'affixes respectives : $z_A = 2 - i$, $z_B = 2i$.

1. Déterminer ne manière algébrique, l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant l'équation $|z - z_A| = 3$.
2. Déterminer ne manière géométrique, l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant l'équation

$|z - z_A| = 3$.

3. Déterminer ne manière algébrique, l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant l'équation $|z - z_A| = |z - z_B|$.
4. Déterminer ne manière géométrique, l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant l'équation $|z - z_A| = |z - z_B|$.

Exercice 6/30

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations par deux méthodes :

1. $|z - 3 + 2i| = 5$
2. $|z + 2 + i| = 1$
3. $|2z + 1 - i\sqrt{3}| = 4$
4. $|z - 3 + 2i| = |z - i|$
5. $|z + 2 + i| = |5 + 2i - z|$
6. $|2z + 1 - i\sqrt{3}| = 2|z + \sqrt{3} - i|$

Exercice 7/30

Soient z_1 et z_2 deux éléments de $\mathbb{U}$ et n un entier naturel.
Démontrer que :

1. $z_1 z_2$ est un élément de $\mathbb{U}$.
2. z_1^n est un élément de $\mathbb{U}$.
3. Vérifier que $z_1 \neq 0$
4. $\dfrac{1}{z_1}$ est un élément de $\mathbb{U}$.
5. $\dfrac{z_2}{z_1}$ est un élément de $\mathbb{U}$.
6. $\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^n$ est un élément de $\mathbb{U}$.

Exercice 8/30

Déterminer le module des nombres complexes suivants :

1. $z = (1 + i)(2 - 3i)$
2. $z = \dfrac{-1 + 3i}{2 - 3i}$
3. $z = (\sqrt{5} + i)^2$
4. $z = (5i - 7)(2 + 7i)(2 - i)$
5. $z = (6 + 8i)^2(8 - 6i)^3$
6. $z = \dfrac{-3 - 6i}{1 + i}$

Exercice 9/30

Déterminer (sans calcul) un argument des nombres complexes suivants :

1. $z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
2. $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
3. $z = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
4. $z = \sqrt{5}$
5. $z = 7i$
6. $z = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
7. $z = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
8. $z = -9$
9. $z = -2i$

Exercice 10/30

Calculer un argument des nombres complexes suivants :

1. $z = 1 + i$
2. $z = \sqrt{3} + i$
3. $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
4. $z = -1 + i\sqrt{3}$
5. $z = -5 - 5i$
6. $z = - - \sqrt{6} + i\sqrt{2}$

Exercice 11/30

Déterminer un argument des nombres complexes suivants :

1. $z=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$
2. $z=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^7$
3. $z=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
4. $z=\left(\sqrt{5}\right)^4$
5. $z=(7i)^2$
6. $z=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
7. $z=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$
8. $z=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
9. $z=(-9)^7$
10. $z=(-2i)^9$

Exercice 12/30

Écrire les expressions suivantes sous la forme trigonométrique :

1. $z=-2$
2. $z=1+i$
3. $z=2\sqrt{3}-2i$
4. $z=-\frac{1}{3}(1-i\sqrt{3})$
5. $z=-5i$
6. $z=i\sqrt{3}$
7. $z=\frac{\sqrt{2}}{5}+i\frac{\sqrt{2}}{5}$
8. $z=-4+4i$
9. $z=-5-5i$

Exercice 13/30

Écrire les expressions suivantes sous la forme trigonométrique :

1. $z=-\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{6}}{2}$
2. $z=-i\sqrt{5}$
3. $z=\sqrt{2}$
4. $z=-9$
5. $z=-2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$
6. $z=\sin\theta+i\cos\theta$
7. $z=-2i$
8. $z=-3(\sin\theta+i\cos\theta)$
9. $z=-i\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

Exercice 14/30

Écrire les expressions suivantes sous formes algébrique :

1. $z=2e^{i\frac{\pi}{4}}$
2. $z=6e^{i\frac{5\pi}{6}}$
3. $z=3e^{i\frac{2\pi}{3}}$
4. $z=\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$
5. $z=\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$
6. $z=\sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

Exercice 15/30

Écrire les expressions suivantes sous formes exponentielle :

1. $z=-2$
2. $z=1+i$
3. $z=2\sqrt{3}-2i$
4. $z=-\frac{1}{3}(1-i\sqrt{3})$
5. $z=-5i$
6. $z=i\sqrt{3}$
7. $z=\frac{\sqrt{2}}{5}+i\frac{\sqrt{2}}{5}$
8. $z=-4+4i$
9. $z=-5-5i$

Exercice 16/30

Écrire les expressions suivantes sous formes exponentielle :

1. $z = i(3 + i\sqrt{3})$
2. $z = -2(3 + i\sqrt{3})$
3. $z = i\sqrt{2}(3 - i\sqrt{3})$
4. $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \times 3ie^{i\frac{\pi}{5}}$
5. $z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$
6. $z = -i\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right)$
7. $z = -2ie^{-i\frac{\pi}{5}} \times 3e^{i\frac{5\pi}{7}} \times \sqrt{3}e^{-i\pi}$

Exercice 17/30

1. Développer et simplifier $\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3$.
2. En déduire que $\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{8}\cos x$.
3. Développer et simplifier $\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3$.
4. En déduire la linéarisation de $\sin^3 x$.

Exercice 18/30

Linéariser les expressions suivantes :

1. $f(x) = \cos(x)\sin^3(x)$
2. $g(x) = \cos^2(5x)\cos(7x)$
3. $h(x) = \cos^3(x)\sin^3(x)$

Exercice 19/30

Soit le nombre complexe $z = 1 + i\sqrt{3}$.
Donner la valeur exacte de $(z)^{2022}$ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

Exercice 20/30

Soit A, B et C les points du plan complexe d'affixes $z_A = 2$, $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = -1 - i\sqrt{3}$. L'objectif de cet exercice est de démontrer que le triangle ABC est équilatéral par deux méthodes.

1. Calculer $|z_B - z_A|$, $|z_B - z_C|$ et $|z_C - z_A|$. Conclure.
2. Calculer $\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$. Conclure.

Exercice 21/30

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point M d'affixe $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, le point P d'affixe $z_1 = \frac{1}{z}$ et le point P', d'affixe z_2, symétrique de P par rapport à l'axe imaginaire.

1. Donner la forme algébrique et la forme exponentielle des nombres z, z_1 et z_2.
2. Soit Q le point d'affixe $z' = \frac{4}{3}(z_1 + z_2)$.
   Démontrer que les points M, P et Q sont alignés.

Exercice 22/30

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -1 + i$, $z_B = -1 - i$, $z_C = 2i$ et $z_D = 2 - 2i$.

1. Calculer les nombres complexes $\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$ et $\dfrac{z_C - z_B}{z_D - z_B}$.
2. En déduire la nature des triangles ACD et BCD.
3. Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 23/30

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes $z_A = -2$ et $z_B = i$, et pour $z \neq i$, M et M' d'affixes z et z' avec $z' = \dfrac{z+2}{z-i}$.
Déterminer :

1. L'ensemble des points M tels que $OM' = 1$.
2. L'ensemble des points M tels que M' soit sur l'axe réel.
3. L'ensemble des points M tels que M' soit sur l'axe imaginaire.

Exercice 24/30

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z| = 2|z - i|$.

Exercice 25/30

Soit le nombre complexe $z = e^{i\theta}$

1. Démontrer que $z^6 = -1 \Longleftrightarrow \theta = \dfrac{\pi + 2k\pi}{6}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. En déduire les solutions de l'équation $z^6 = -1$.

Exercice 26/30

Déterminer les nombres complexes z tels que $z^3 = i$.

Exercice 27/30 : Vrai/Faux

1. En notant A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1 - i$ et $z_B = -3 + 2i$, on a $AB = 4$.
2. Les points A, B et C d'affixes respectives $z_1 = 3 + 6i$, $z_B = 7 + 18i$ et $z_C = -1 - 6i$ sont alignés.
3. L'ensemble des points d'affixe z tels que $|z - i| = |z + i|$ est l'axe des ordonnées.
4. L'ensemble des points d'affixe z tels que $|z - 1 + 3i| = 4$ est un cercle.
5. Le module d'une racine n-ième de l'unité est égal à 1.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe n racines n-ième de l'unité distinctes.

7. Les racines troisièmes de l'unité sont 1, $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
8. Les points d'affixe 1, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}}$ forment un triangle équilatéral.

Exercice 28/30

Exprimer en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ les expressions suivantes

1. $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.
2. $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 29/30

Calculer de deux façons le cosinus et le sinus de $\dfrac{\pi}{12}$.

1. En écrivant $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$.
2. En écrivant $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{6}$.
3. Y a-t-il incohérence dans les résultats des deux questions précédentes ?

Exercice 30/30 : Vrai/Faux

1. Pour tout $\theta\in\mathbb{R},\ \sin(2\theta)=2\sin\theta$.
2. Pour tout $x\in\mathbb{R},\ \cos x=2\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)-1$.
3. Pour tout $\theta\in\mathbb{R},\ e^{i\theta}$ est un nombre complexe de module 1.
4. L'exponentielle imaginaire $e^{i\theta}$ est toujours un nombre non réel.
5. Pour $\theta,\ \theta'\in\mathbb{R},\ e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$.
6. Pour tout $\theta\in\mathbb{R},\ \sin(\theta)=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$.
7. -5 s'écrit sous forme exponentielle $-5e^{i0}$.
8. L'écriture sous forme exponentielle d'un nombre complexe non nul est unique.
9. $\left(4\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)+4i\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)\right)^3=4\cos\dfrac{3\pi}{8}+4i\sin\dfrac{3\pi}{8}$.
10. $(1+i\sqrt{3})^6$ est un nombre réel.
11. Pour tout $\theta\in\mathbb{R},\ e^{i\theta}+1=2e^{i\frac{\theta}{2}}\cos\dfrac{\theta}{2}$