Nombres réels

I Les nombres décimaux et les rationnels

L'ensemble des **nombres décimaux** est noté $\mathbb{D}$.

Un nombre décimal peut s'écrire avec un nombre **fini** de chiffres après la virgule.

Exemples

- $0,56 \in \mathbb{D}$ (Rappel : le signe $\in$ signifie " appartient à ")
- $3 \in \mathbb{D}$
- $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$, mais $\frac{3}{4} \in \mathbb{D}$

Un nombre décimal est alors un nombre de la forme $\frac{a}{10^p}$ avec a entier et p entier naturel.

Exemple

$$\frac{523}{10^2} = 5,23$$

L'ensemble des **nombres rationnels** est noté $\mathbb{Q}$.

Un nombre rationnel est un nombre sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ avec a un entier et b un entier non nul.

Exemples

- $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$
- $4 \in \mathbb{Q}$
- $-4,8 \in \mathbb{Q}$
- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Démonstration

Démontrons que le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal :
La méthode de démonstration que nous allons utiliser est un **raisonnement par l'absurde** en supposant que $\frac{1}{3}$ est décimal. (On suppose donc que notre propriété est fausse et on cherche à arriver à une contradiction).

Supposons donc que $\frac{1}{3}$ est décimal.
Alors il s'écrit sous la forme $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^p}$ avec a entier et p entier naturel.
Donc $10^p = 3a$ et donc 10^p est divisible par 3.
Un nombre est divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3.
Or, ceci est impossible car la somme des chiffres de 10^p est 1, et 1 n'est pas divisible par 3.
Donc l'hypothèse posée au départ est fausse et donc $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

II Nombres réels

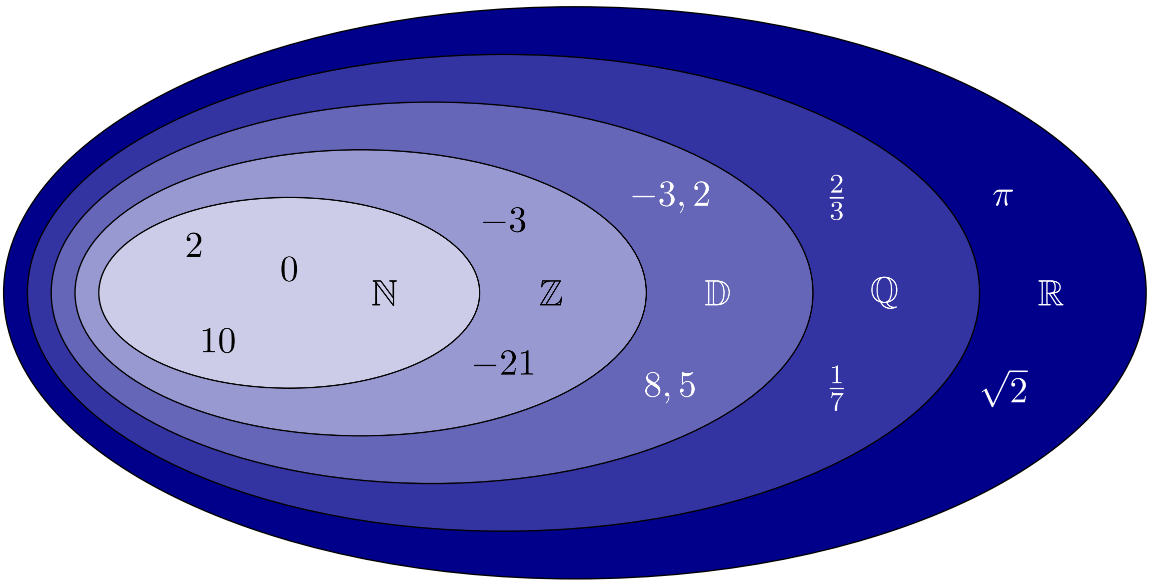
L'ensemble des **nombres réels** est noté $\mathbb{R}$.

Un nombre est réel s'il est l'abscisse d'un point sur une droite graduée appelée la **droite numérique**.

> **Exemple**
>
> 2, 0, -5, $0,67$, $\frac{1}{3}$, ou π appartiennent à $\mathbb{R}$.

Finalement, on a les inclusions suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



Nous avons vu qu'un nombre qui pouvait s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$, était un nombre dit rationnel. Qu'en est-il des nombres n'étant pas sous cette forme ?

Définition

Un nombre réel qui n'est pas rationnel est dit **irrationnel**.

> **Exemples**
>
> $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ou encore π sont des nombres irrationnels. Ils ne peuvent pas s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b deux entiers relatifs, b non nul.

Comme pour un nombre rationnel, il n'est pas possible d'écrire un nombre irrationnel sous forme décimale. En effet, le nombre de décimales qui le constitue est infini mais de surcroît ses décimales se suivent sans suite logique.

Démonstration

Irrationalité de $\sqrt{2}$.
On va à nouveau effectuer une démonstration par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}$ est rationnel.
Supposons donc que $\sqrt{2}$ est un rationnel.
Alors il doit s'écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels premiers entre eux, b non nul.
Ainsi :

$$\frac{a^2}{b^2} = 2 \text{ soit } a^2 = 2b^2$$

On en déduit que a^2 est pair, ce qui entraîne que a est pair. (Voir Notion de multiple, diviseur...).
Or, puisque a est pair, il existe un entier naturel k tel que $a = 2k$.
Comme $a^2 = 2b^2$,
Alors : $(2k)^2 = 2b^2$, soit $4k^2 = 2b^2$:
Soit encore $b^2 = 2k^2$.
On en déduit que b^2 est pair, ce qui entraîne que b est pair. Or, a et b sont premiers entre eux, donc ils ne peuvent être pairs simultanément. On aboutit **une absurdité**.
Donc, $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel.