

NOMBRES PREMIERS ET PGCD

Les plus anciennes traces des nombres premiers remontent à 20 000 ans avant notre ère, sur un os appelé l'os d'Ishango retrouvé au Congo, près du Lac Edward. On y trouve des entailles marquant les nombres 11, 13, 17 et 19.

C'est Euclide (vers 300 avant J.C.) qui, dans le livre VII de ses *Éléments* posa une définition du nombre premier : « Le nombre premier est celui qui est mesuré par la seule unité ».

I PGCD de deux entiers

Soit a et b deux entiers relatifs tels que $(a, b) \neq (0; 0)$, on appelle **plus grand diviseur commun** de a et b , le plus grand des diviseurs communs de a et b et on le note $\text{PGCD}(a, b)$.

Définition

Soit a et b deux entiers relatifs, $\text{PGCD}(a, b) \geq 1$, donc le PGCD est un entier naturel non nul. D'autre part $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(|a|, |b|)$.

Remarque

Exemple

Les diviseurs de 60 dans \mathbb{N} sont $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60\}$ et les diviseurs de 100 dans \mathbb{N} sont $\{1; 2; 4; 5; 10; 20; 25; 50; 100\}$.

Quel est le PGCD de 100 et 60 ?

Algorithme d'Euclide : Soit a , b et r trois entiers relatifs avec $b > 0$. Si r est le reste de la division euclidienne de a par b , alors

$$\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, r)$$

Théorème

soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b . On a alors $a = bq + r$. Soit D un diviseur de b et de r . Donc D est aussi un diviseur de a .

Réciproquement, si D est un diviseur de a et de b , alors D divise $a - bq = r$, donc D divise r .

Donc l'ensemble des diviseurs communs à a et b est égal à l'ensemble des diviseurs communs à b et r . Donc plus particulièrement, $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, r)$.

Démonstration

Exemple

Déterminer le PGCD de 252 et 360.

Soit a , b et Δ trois entiers relatifs avec $(a, b) \neq (0; 0)$.

- Pour tout $d \in \mathbb{Z}$, $(d|a$ et $d|b)$ ssi $(d|\text{PGCD}(a, b))$;
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, $\text{PGCD}(ka, kb) = |k|\text{PGCD}(a, b)$;
- $(\Delta = \text{PGCD}(a, b))$ ssi $(\exists a', b' \in \mathbb{Z} : a = \Delta a'$ et $b = \Delta b'$ et $\text{PGCD}(a', b') = 1)$.

La première proposition de ce théorème affirme que les diviseurs communs à a et b sont les diviseurs de leur PGCD et réciproquement.

- On a démontré précédemment que l'ensemble de diviseurs communs à a et b , est également l'ensemble des diviseurs communs à b et r .

On poursuit alors le raisonnement et on crée une suite (r_n) strictement décroissante :

- $a = bq + r_0$
- $b = r_0q' + r_1$
- $r_0 = r_1q'' + r_2$
- .
- .
- .

Or il n'existe qu'un nombre fini d'entiers entre r_0 et 0, il existe donc un rang k tel que r_k soit différent de 0 et $r_{k+1} = 0$.

Ainsi l'ensemble des diviseurs communs de a et b est égal à l'ensemble des diviseurs communs de r_k et 0.

On en déduit que l'ensemble des diviseurs communs de a et b est égal à l'ensemble des diviseurs de r_k .

- En appliquant l'algorithme d'Euclide, on obtient successivement :
 $k \in \mathbb{Z}^*$, $\text{PGCD}(ka, kb) = \text{PGCD}(kb, kr) = \text{PGCD}(kr, kr_1) = \dots = \text{PGCD}(kr_k, 0) = kr_k = k\text{PGCD}(a, b)$.
- Sens direct :
 Si Δ est le PGCD de a et de b alors il existe a' et b' entiers relatifs tel que $a = a'\Delta$ et $b = b'\Delta$ car Δ est diviseur commun à a et b .
 Raisonnons par l'absurde en supposant alors que le PGCD de a' et b' est un certain $\delta > 1$.
 Donc il existe a'' et b'' entiers relatifs tel que $a' = a''\delta$ et $b' = b''\delta$.
 Donc $a = a'\Delta = a''\delta\Delta$ et $b = b'\Delta = b''\delta\Delta$.
 C'est absurde, car cela voudrait dire qu'il existe un diviseur commun à a et b , plus grand que Δ .
 Donc $\text{PGCD}(a', b') = 1$.
 La réciproque est évidente :
 $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(\Delta a', \Delta b') = \Delta \text{PGCD}(a', b') = \Delta$.

Exemple

- Chercher les diviseurs communs de 2730 et 5610.
- Chercher le PGCD de 420 et 540

II Nombres premiers entre eux

Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si leurs seuls diviseurs communs sont 1 et (-1) . Autrement dit a et b sont premiers entre eux si $\text{PGCD}(a, b) = 1$.

Définition

Identité de Bézout Soit a et b deux entiers relatifs avec $(a, b) \neq (0; 0)$, alors il existe un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que :

$$au + bv = \text{PGCD}(a, b)$$

Théorème

On note $\Delta = \text{PGCD}(a, b)$ et ε l'ensemble des entiers naturels non nuls de la forme $ax + by$ avec x et y des entiers relatifs.

ε est une partie non vide de \mathbb{N} : si $a > 0$ alors $a \times 1 + b \times 0$ est dans ε .

$a < 0$ alors $a \times (-1) + b \times 0$ est dans ε .

Si $a = 0$, il suffit d'utiliser le même raisonnement avec b .

ε admet donc un plus petit élément que l'on notera n , tel que $n = au + bv$ avec u et v entiers relatifs.

Or $\Delta|a$, $\Delta|b$ donc $\Delta|n$. Donc $\Delta \leq n$.

Soit q et r respectivement le quotient et le reste dans la division Euclidienne de a par n .

$a = nq + r = (au + bv)q + r$ donc $r = a \times (1 - u) + b \times (-1)$ donc $r \in \varepsilon$.

Or $0 \leq r < n$ ce qui n'est donc possible que dans le cas où $r = 0$ car n est le plus petit élément de ε .

Donc $n|a$, $n|b$ et donc $n|\Delta$.

Or $\Delta|n$ également, donc $\Delta = n$.

Démonstration

Théorème de Bézout Soit a et b deux entiers relatifs avec $(a, b) \neq (0; 0)$, a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que :

$$au + bv = 1$$

Théorème

- D'après l'égalité de Bézout, si a et b sont premiers entre eux, alors il existe u et v entiers relatifs tel que $au + bv = 1$.
- Supposons qu'il existe u et v entiers relatifs tel que $au + bv = 1$. Soit $\Delta = \text{PGCD}$.
Donc $\Delta|au + bv$ donc $\Delta|1$ donc $\Delta = 1$.
 a et b sont donc premiers entre eux.

Démonstration

Exemple

Démontrer que pour tout entier naturel n , $2n + 3$ et $5n + 7$ sont premiers entre eux

Un entier a admet un inverse modulo n , si a et n sont premiers entre eux.

Propriété

Exemple

- Déterminer un inverse de 5 modulo 16.
- En déduire les solutions de l'équation $5x \equiv 7[16]$.

Théorème

Théorème de Gauss : soit a , b et c trois entiers relatifs avec $(a, b) \neq (0; 0)$. Si $a|bc$ et si a et b sont premiers entre eux, alors $a|c$.

Démonstration

Supposons donc que $a|bc$ et que a et b sont premiers entre eux.
 Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$, tel que $bc = ka$.
 D'autre part, a et b étant premiers entre eux, il existe, d'après le théorème de Bézout, deux entiers relatifs u et v tel que $au + bv = 1$ donc $auc + bcv = c$ donc $a(uc + kv) = c$.
 Or $cu + kv \in \mathbb{Z}$, donc $a|c$.

Propriété

Soit a , b et c trois entiers relatifs avec $(a, b) \neq (0; 0)$. Si $a|c$, $b|c$ et si a et b sont premiers entre eux, alors $ab|c$.

Démonstration

Supposons donc que $a|c$ et $b|c$. Supposons de plus que a et b sont premiers entre eux.
 Il existe donc k et k' entiers relatifs tel que $c = ak$ et $c = bk'$ donc $ak = bk'$.
 Or a et b sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss $a|k'$. Donc il existe k'' entier relatif tel que $k' = ak''$.
 Donc $c = bk' = bak''$ et finalement, $ab|c$.

Exemple

- Soit un entier naturel n . On suppose que $5n$ est un multiple de 3. Quelles sont les valeurs possibles pour n ?
- Soit un entier naturel n multiple de 7 et de 11. Quelles sont les valeurs possibles pour n ?

Exemple

- Déterminer les entiers relatifs x et y tels que $5x + 7y = 1$.
- Déterminer les entiers relatifs x et y tels que $5x + 7y = 12$.

III Nombres premiers

Définition

Un nombre premier est un entier naturel supérieur ou égal à 2 qui n'admet pas d'autres diviseurs positifs que 1 et lui-même. Dans le cas contraire, il est dit composé.

Propriété

Tout entier naturel $n > 1$ et non premier admet un diviseur premier p tel que $p \leq \sqrt{n}$.

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1 et non premier.

On note alors E l'ensemble des diviseurs de n différent de 1 et lui-même.

Cet ensemble est non vide car n n'est pas premier. Donc E admet un plus petit élément que l'on note p .

Si p admet un diviseur p' autre que 1 ou lui-même, alors p' est aussi un diviseur de n plus petit que p . Ce n'est pas possible car p est le plus petit élément de E .

On en déduit donc que p est un nombre premier.

Il existe donc $q \geq p$ (car p est le plus petit élément de E), tel que $n = pq \geq p^2$ donc $p \leq \sqrt{n}$.

Exemple

391 est-il premier ?

L'ensemble des nombres premiers est infini.

Soit un nombre premier n quelconque. Nous allons démontrer qu'il existe un nombre premier plus grand que n .

Nous utiliserons un raisonnement par l'absurde en supposant qu'il existe un nombre fini de nombres premiers.

Soit $E = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ l'ensemble des nombres premiers avec $m \in \mathbb{N}$.

E est une partie non vide et finie de \mathbb{N} de plus grand élément p_m .

On pose alors $n = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_m + 1$.

$n \notin E$ car $n > p_m$, donc n est composé et admet donc un diviseur premier inférieur ou égal à \sqrt{n} .

Il existe donc $k \in \mathbb{N}$, tel que $n \equiv 0 [p_k]$.

Or $p_1 \times \dots \times p_k \times \dots \times p_m \equiv 0 [p_k]$ donc $p_1 \times \dots \times p_k \times \dots \times p_m + 1 \equiv 1 [p_k]$ donc $n \equiv 1 [p_k]$ ce qui est contradictoire.

D'où n est un nombre premier. CQFD.

Théorème fondamental de l'arithmétique : Soit n un entier naturel, $n \geq 2$. Il existe alors des nombres premiers p_1, \dots, p_r et des entiers naturels non nuls $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tels que :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}$$

Existence :

Soit n un entier naturel non nul.

Si n est premier, le résultat est immédiat, sinon, il existe un nombre premier p_1 , plus petit diviseur de n strictement supérieur à 1. Donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = p_1 \times k$.

Si k est lui même premier, alors l'existence est établie, sinon on réitère le processus pour obtenir une suite (k_n) décroissante et finie d'entiers naturels. Ainsi, n se décompose en un produit de facteurs premiers du type : $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}$.

Unicité :

On effectue une démonstration à l'aide d'une récurrence forte :

Soit pour tout $n \geq 2$ entier naturel la proposition $P(n)$ suivante : « La décomposition en produit de facteurs premiers de n est unique ».

Initialisation :

rang $n = 2$.

2 est lui même un nombre premier donc $P(2)$ est vraie.

Hérédité :

Supposons $P(k)$ vraie pour tous les $k \in [2; n - 1]$ avec un certain $n \geq 3$ et montrons que cela implique $P(n)$ vrai.

- Supposons qu'il existe deux décompositions pour n tel que $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}$ et $n = q_1^{\beta_1} \times q_2^{\beta_2} \times \dots \times q_r^{\beta_r}$
- On a donc p_1 qui divise $q_1^{\beta_1} \times q_2^{\beta_2} \times \dots \times q_r^{\beta_r}$.
Donc il existe q_k avec $k \in \mathbb{Z}$ tel que p_1 et q_k ne soit pas premier entre eux. Or p_1 et q_k sont deux nombres premiers donc $p_1 = q_k$.
On pose $n' = \frac{n}{p_1}$. On a donc $n' < n$, admettant deux décompositions distinctes. C'est impossible d'après l'hypothèse de récurrence.
Donc $P(n + 1)$ est vraie

Conclusion :

La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 2$.

D'après le principe de récurrence : $\forall n \geq 2$, $P(n)$ est vraie.

La propriété est ainsi démontrée.

Cette écriture, unique à l'ordre des facteurs près, s'appelle décomposition primaire de n .

Exemple

- Décomposer 17 640 et 411 600 en produits de facteurs premiers.
- En déduire le PGCD et le PPCM de ces deux nombres.
- Déterminer tous les diviseurs de 132.

Petit théorème de Fermat : soit p un nombre premier et n un entier naturel. Alors :

- $n^p \equiv n \pmod{p}$
- si p ne divise pas n , $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Résultat préliminaire : Soit $k \in [[1, p-1]]$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$k \binom{p}{k} = \frac{p!}{(k-1)!(p-k)!} = p \frac{(p-1)!}{(k-1)!(p-1-(k-1))!} = p \binom{p-1}{k-1}$$

Donc $p|k \binom{p}{k}$ or $k < p$ donc d'après le théorème de Gauss, $p| \binom{p}{k}$ donc $\binom{p}{k} \equiv 0 [p]$

Pour tout entier naturel n , on considère la proposition $P(n)$ suivante : $n^p \equiv n [p]$ avec p premier.

Initialisation :

$$\text{rang } n = 0$$

$0^p \equiv 0 [p]$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang $n \geq 0$ et montrons que cela implique $P(n+1)$ vrai.

$$P(n) \text{ vraie} \iff n^p \equiv n [p]$$

$$\text{Or } (n+1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n^k$$

D'après le résultat préliminaire, pour $k \in [[1, p-1]]$, $\binom{p}{k} \equiv 0 [p]$

donc $\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n^k \equiv 1 + n^p [p]$ or d'après l'hypothèse de récurrence $n^p \equiv n [p]$, donc

$$\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n^k \equiv 1 + n [p] \text{ donc } (n+1)^p \equiv n+1 [p]$$

Conclusion :

$P(n)$ vraie $\implies P(n+1)$ vraie. La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 0$.

D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$.

La propriété est ainsi démontrée.

$n^p \equiv n [p]$ ssi $n(n^{p-1} - 1) \equiv 0 [p]$ donc $p|n(n^{p-1} - 1)$. Or si p ne divise pas n alors ils sont premiers entre eux car p est premier, donc $p|n^{p-1} - 1$ donc $n^{p-1} \equiv 1 [p]$.

Exemple

Démontrer que pour tout entier naturel n , 7 divise $3^{6n} - 1$.