Version 240822

LABOR ET DILECTIO

PAU 1884

2024/2025

Nombres complexes (2)

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fait preuve, dès le plus jeune âge, d'aptitudes intellectuelles exceptionnelles. Il se passionne pour l'astronomie et, la même année, il découvre l'astéroïde Cérès et publie un ouvrage fondamental sur la théorie des nombres : il n'a que 24 ans ! Par la suite, il explore de nombreuses branches des mathématiques, ouvrant chaque fois des perspectives nouvelles. Il utilise dès 1801 les nombres complexes pour déterminer les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas. C'est à lui qu'on doit le qualitatif de « complexe » pour nommer ces nombres, non pas parce qu'ils sont compliqués mais parce qu'ils s'expriment à l'aide de deux nombres réels.

I Forme trigonométrique

I.1 Angle orienté et mesure principale

Définition

Un angle orienté est défini par deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. L'angle est alors orienté de $\overrightarrow{u}$ vers $\overrightarrow{v}$.
On dit que les mesures (en radian) θ_1 et θ_2 d'un même angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ sont égales modulo 2π, s'il existe un entier relatif k tel que :

$$\theta_2 = \theta_1 + 2k\pi$$

On note $\theta_1 = \theta_2 \ [2\pi]$
On appelle mesure principale d'un angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, la mesure θ avec $\theta \in]-\pi;\pi]$.

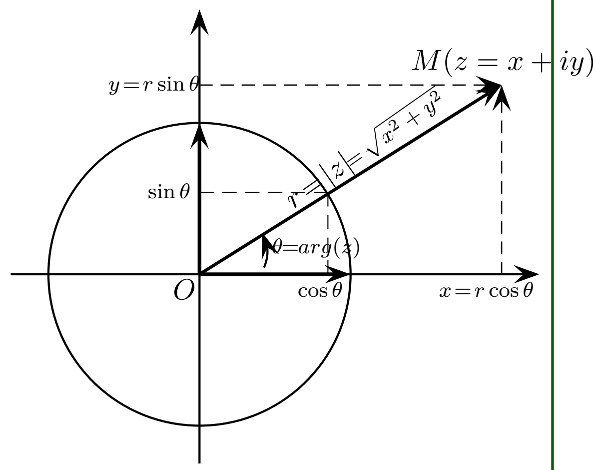
Remarque

On veillera à donner un angle orienté avec sa mesure principale : par exemple $-\dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} \ [2\pi]$

I.2 La forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition

Soit $z = a + ib$ un complexe non nul.



On note $\theta = arg(z)$.
On a alors $\cos\theta = \dfrac{a}{|z|}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{|z|}$.
D'où $z = a + ib = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta$

$= |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Cette écriture est la forme **trigonométrique** de z avec :

- $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ le module de z
- $\theta = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}) = arg(z)\ [2\pi]$ argument

Exemple

Trouver la forme trigonométrique de :

a. $z = 1 - i$ b. $z = 3 + 3\sqrt{3}i$ c. $z = -2i$ d. $z = 4$

Exemple

Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

- $z_1 = 3$
- $z_2 = -4$
- $z_3 = 2i$
- $z_4 = -1 + i$
- $z_5 = -\sqrt{3} + i$
- $z_6 = -17$
- $z_7 = -6\sqrt{3} + 6i$
- $z_8 = 5i$
- $z_9 = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$.

I.3 Relations de symétrie

Propriété

Pour tout complexe z non nul, on a les relations suivantes :

- $|-z| = |z|$ et $arg(-z) = arg(z) + \pi\ [2\pi]$
- $|\overline{z}| = |z|$ et $arg(\overline{z}) = -arg(z)\ [2\pi]$

I.4 Relations trigonométriques

Théorème

Formules d'addition :

Pour tous réels a et b, on a les relations

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$

Nous allons commencer par démontrer que $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.

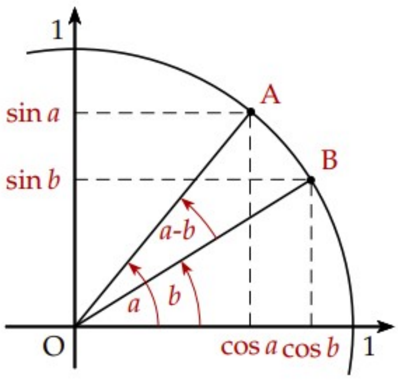
Pour cela, nous allons calculer de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$.

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA\times OB\times\cos(a-b) = \cos(a-b)$.

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$

$= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

D'où $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$



Pour trouver la deuxième formule en cos il suffit de remplacer b par $-b$.
Pour trouver les formule en sin, il suffit d'utiliser les relations suivantes :
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin(\alpha)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-a-b\right) = \sin(a+b) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos(b) + \sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin(b)$...

Démonstration

Formules de duplication :
Pour tout réel a, on a les relations :

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

Théorème

On utilise les formules d'addition en faisant $b = a$.

Démonstration

II Opérations sur les modules et arguments

Pour tous complexes z et z' non nuls, on a les relations suivantes :

- $|zz'| = |z||z'|$ et $arg(zz') = arg(z) + arg(z')\ [2\pi]$
- $|z^n| = |z|^n$ et $arg(z^n) = n\times arg(z)\ [2\pi]$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')\ [2\pi]$

Théorème

Démonstration

Soit $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ et $z' = r'(\cos(\theta') + i\sin(\theta'))$.
$zz' = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))r'(\cos(\theta') + i\sin(\theta'))$
$= rr'(\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + i(\cos(\theta)\sin(\theta') + \cos(\theta')\sin(\theta))$
$= rr'(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta'))$

Pour démontrer que $|z^n| = |z|^n$ et $arg(z^n) = n \times arg(z)\ [2\pi]$, on procède par récurrence.

Pour le quotient, on pose $Z = \dfrac{z}{z'}$ on a donc $z = Zz'$.
On a donc $|z| = |Zz'| = |Z||z'|$ donc $|Z| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
$arg(z) = arg(Z) + arg(z')\ [2\pi]$ donc $arg(Z) = arg(z) - arg(z')\ [2\pi]$

III Forme exponentielle

III.1 Introduction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, tel que $f(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

$f(\theta)f(\theta') = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\theta') + i\sin(\theta')) = ... = f(\theta + \theta')$

Les seules fonctions dérivables non nulles ($f(0) = 1$) sur $\mathbb{R}$ qui transforment une somme en produit sont du type $f(x) = e^{kx}$.
En étendant la fonction exponentielle à $\mathbb{C}$, on pose $f(\theta) = e^{k\theta}$ avec $k \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Dérivons la fonction f pour déterminer k :
$f'(\theta) = ke^{k\theta}$ et $f'(\theta) = -\sin(\theta) + i\cos(x) = i(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = if(\theta)$.
On obtient donc $k = i$.
En étendant la fonction exponentielle à $\mathbb{C}$, on pose $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Définition

La forme exponentielle d'un nombre complexe non nul est :

$$z = re^{i\theta} \text{ avec } r = |z| \text{ et } \theta = arg(z)\ [2\pi]$$

Exemple

Donner la forme exponentielle :

a. $z = -1 - i$
b. $z = 5i$
c. $z = -9$
d. $z = -\sqrt{3} + i$

Exemple

Placer dans le plan complexe et écrire sous formes trigonométrique et algébrique les nombres complexes :

a. $3e^{-i\frac{\pi}{2}}$

b. $\sqrt{2}e^{3i\frac{\pi}{4}}$

c. $6e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

d. $5e^{i\frac{5\pi}{3}}$

e. $2e^{i\frac{\pi}{4}}\,e^{-i\frac{3\pi}{2}}$

f. $\dfrac{3e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$

Écrire sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes :

a. 5

b. $4+4i$

c. $\dfrac{3}{2}i$

d. $\dfrac{2}{1-i}$

e. $\sqrt{3}-i$

f. $(\sqrt{3}-i)^2$

g. $(\sqrt{3}-i^3)$

IV Formule de Moivre et formules d'Euler

Théorème

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

- Formule de Moivre : $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = e^{in\theta} = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$
- Formule d'Euler : $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Démonstration

- La formule de Moivre est l'application directe de la relation fonctionnelle de la fonction exponentielle : $e^{n\theta} = (e^{\theta})^n$
- Pour les formules d'Euler, on développe la forme exponentielle :
  - $\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \dfrac{\cos(\theta)+i\sin(\theta)+\cos(\theta)-i\sin(\theta)}{2} = \cos(\theta)$
  - $\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \dfrac{\cos(\theta)+i\sin(\theta)-\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{2i} = \sin(\theta)$

V Ensemble des complexes de module 1

V.1 Propriété

Théorème

Soit $\mathbb{U}$, l'ensemble des complexes de module 1.

- $z \in \mathbb{U} \Longleftrightarrow z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$
- L'ensemble $\mathbb{U}$ est stable par rapport au produit et à l'inverse :

$$z, z' \in \mathbb{U} \Longrightarrow zz' \in \mathbb{U} \text{ et } \frac{1}{z} \in \mathbb{U}$$

Démonstration

Propriété des modules pour le produit et l'inverse :

V.2 Racines n-ième de l'unité

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Les racines n-ième de l'unité sont les solutions de l'équation $z^n = 1$.
- $\mathbb{U}_n$ est l'ensemble des n racines de l'unité :

$$\mathbb{U}_n = \{z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}},\ k \in [[0, n-1]]\}$$

- Leur somme est nulle : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 1 + z_1 + ... + z_{n-1} = 0$
- Leurs images M_k dans le plan complexe sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans le cercle unité.

Démonstration

Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$$z^n = 1 \iff \begin{cases} |z^n| & = 1 \\ arg(z^n) & = 0\ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} |z|^n & = 1 \\ narg(z) & = 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} |z| & = 1 \\ arg(z) & = \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

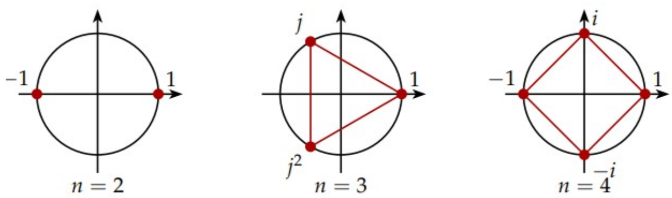
Il y a n angles distincts correspondant aux valeurs de $k \in [[0, n-1]]$.
Les solutions sont les puissances de $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 1 + z_1 + ... + z_{n-1} = 1 + z_1 + z_1^2 + ... + z_1^{n-1} = \frac{1 - z_1^n}{1 - z_1} = 0 \text{ car } z_1^n = e^{i\frac{2n\pi}{n}} = 1.$$

Soit les points $M_k(z_k)$, on a alors $(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}) = \dfrac{2\pi}{n}$ avec $k \in [[0, n-1]]$. Les points M_k sont alors les sommets d'un polygone régulier de n côtés.

Exemple

- $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$
- $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ en posant $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$
- $\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$



VI Nombres complexes et vecteurs

Théorème

Pour tous points $A(z_A)$ et $B(z_B)$ du plan complexe, on note :

- $z_{\overrightarrow{AB}}$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ on a alors :

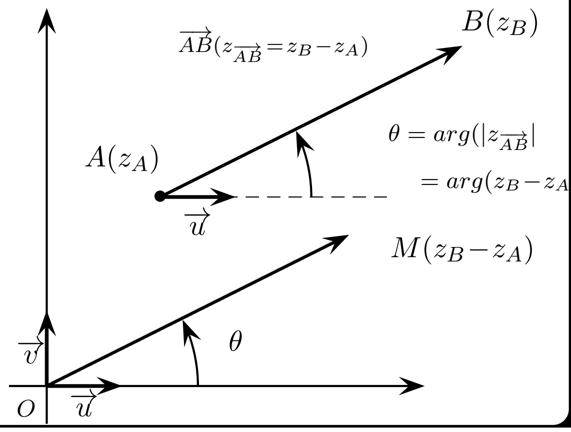
$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A,\ AB = |z_B - z_A|,\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}) = arg(z_B - z_A)$$

- Soit I le milieu de $[AB]$, on a alors :

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

Démonstration

Soit $M(a,b)$ et $M'(a',b')$ deux points du plan complexe.
Donc $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} a'-a \\ b'-b \end{pmatrix}$
D'où l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est $z_{\overrightarrow{MM'}} = (a'-a) + i(b'-b) = a' + ib' - (a+ib) = z' - z$



Exemple

On donne : $A(2+i)$ et $B(-1-2i)$.
Faire une figure puis déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$, la distance AB et l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB})$.

Propriété

Équation d'un cercle : Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, le cercle de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ d'affixe z_Ω, et de rayon r a pour

- équation cartésienne $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2$
- équation complexe $|z - z_\Omega| = r$

Médiatrice du segment $[AB]$:

$$|z - z_A| = |z - z_B| \iff AM = BM$$

Exemple

Soit M un point d'affixe z. Dans chaque cas, déterminer et représenter :

a. L'ensemble des points M tels que $|z - 2i| = 3$.
b. L'ensemble des points M tels que $|iz - 3| = 1$.
c. L'ensemble des points M tels que $|\overline{z} - 3 + i| = |z - 5|$.
d. L'ensemble des points M tels que $\dfrac{|z-i|}{|z|} = 2$
e. L'ensemble des points M tels que $arg(z) = \dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$
f. L'ensemble des points M tels que $arg(z - 2 + i) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

Théorème

Pour tous points A, B, C et D tels que $(A \neq B)$ et $(C \neq D)$, on a :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

Démonstration

On sait que $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w})$.
Or $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) = (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = arg(z_D - z_C) - arg(z_B - z_A) = arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

Propriété

Soit A, B, C et D quatre points distincts deux à deux :

$$A,\ B,\ C \text{ alignés} \iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ colinéaires} \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

$$(AB) \text{ et } (CD) \text{ sont parallèles} \iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ colinéaires} \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

Démonstration

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si et seulement si, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0\ [\pi]$.
On en déduit que $arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0\ [\pi]$
même chose avec les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ pour deux droite parallèles.

Propriété

Soit $A \neq B$ et $C \neq D$ quatre points.

$$(AB) \perp (CD) \iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$$

Démonstration

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux si et seulement si, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.
On en déduit que $arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

Remarque

Pour montrer que ABC est rectangle isocèle en A, on montre que : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i$

Exercice 1

Dans le plan complexe, A, B et C sont les points d'affixes :

$$z_A = 1 + i\ ,\ z_B = 4 + 5i\ ,\ z_C = 5 - 2i\ .$$

a. Montrer que $AB = AC$, puis que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$.

b. Déterminer l'affixe du point K tel que le quadrilatère $ABKC$ soit un rectangle.

c. Déterminer l'affixe du point G tel que le quadrilatère $AGBC$ soit un parallélogramme.

d. Vérifier que B est le milieu du segment $[GK]$.

Exercice 2

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

• $|z - 6i| = 3$ • $|z + 3 - 2i| < 2$ • $|z + 2| = |z - 3i + 1|$ • $|2 - iz| = |z + 5|$ • $|\frac{z + 2i}{z + 1 - 2i}| > 1$

Exercice 3

Exprimer sous forme algébrique les nombres complexes, puis refaire l'exercice avec les conjugués de ces nombres.

- $(2+3i)+(-1+6i)$ • $(5+i)-(3-2i)$ • $(1+i)(3-2i)$ • $(4+i)(-5+3i)$
- $(2-i)^2$ • $(x+iy)(x'+iy')$ • $(x+iy)^2$ • $(2-3i)(2+3i)$ • $(a+ib)(a-ib)$

Exercice 4

Les points A, B et C ont pour affixe respective $-2+i$, $3+3i$, $1+\dfrac{11}{5}i$.

a. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b. En déduire que les points A, B et C sont alignés.

c. Placer les points A, B et C.

Exercice 5

Les points A, B et C ont pour affixe respective $1+\dfrac{1}{2}i$, $\dfrac{3}{2}+2i$ et $-1-\dfrac{11}{2}i$.

Montrer que les points A, B et C sont alignés.

Exercice 6

On considère dans le plan complexe les points A, B, C et D d'affixe $z_A=3+i$, $z_B=2-2i$, $z_C=2i$ et $z_D=1+5i$.

a. Faire une figure

b. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 7

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes :

- $\dfrac{1}{\sqrt{3}+2i}$ • $\dfrac{1+4i}{1-\sqrt{2}i}$ • $2+i\sqrt{3}(5-i)+\dfrac{1}{2}+3i^2$ • i^3 • $\dfrac{1}{i}$ • i^4 • i^5 • i^6

Exercice 8

À propos de j.

a. Donner la forme algébrique de : i^{12} ; i^{2012} ; i^{37} ; i^{-13}

b. Calculer la somme : $S=1+i+i^2+\cdots+i^{2014}$

c. On pose $j=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer $1+j+j^2$.

Exercice 9

On note $\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C},\ |z|=1\}$

a. Montrer que si $(z,z')\in\mathbb{U}^2$ alors $zz'\in\mathbb{U}$, $z^n\in\mathbb{U}$, $\dfrac{1}{z}\in\mathbb{U}$ et $\dfrac{z'}{z}\in\mathbb{U}$ avec $z\neq 0$.

b. Parmi les nombres suivants, déterminer ceux qui appartiennent à l'ensemble $\mathbb{U}$:

(a) $z=-\dfrac{3}{4}+i\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

(b) $z=\dfrac{\sqrt{5}}{2}-i\dfrac{1}{2}$

(c) $z=\dfrac{2\sqrt{6}+i}{5}$

(d) $z=\dfrac{-6+i}{5+2i\sqrt{3}}$

Exercice 10

a. On donne $z_1=e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2=3e^{-i\frac{\pi}{3}}$, et $z_3=\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

Donner sous la forme exponentielle puis algébrique les complexes : $z_1z_2z_3$, $\dfrac{z_1}{z_2z_3}$, z_2^2, z_3^6.

b. Simplifier l'expression, où $\theta\in\mathbb{R}$,

$$\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2.$$

Était-ce prévisible sans calcul ?

c. Écrire le nombre complexe $(\sqrt{3}-i)^{10}$ sous forme algébrique.

Exercice 11 :

À l'aide des formules d'addition, montrer que :

a. $2\cos(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}\cos(\frac{2}{3}x) + \sin(\frac{2}{3}x)$

b. $\sin(x + \frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$

c. $4\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}\sin(2x) - 2\sqrt{2}\cos(2x)$

Exercice 12 :

En utilisant les formules d'addition, donner les valeurs exactes des cosinus et sinus de :

a. $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

b. $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$

c. $\frac{7\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$.