



# NOMBRES COMPLEXES (1)

En 1545, **Jérôme Cardan** publie un ouvrage dans lequel on trouve pour la première fois une formule donnant les solutions des équations du troisième degré. Pour certaines d'entre elles, l'application de la formule faisant apparaître l'expression  $\sqrt{-1}$  qui se simplifiait par miracle, fournissant le bon résultat. Le mathématicien italien Rafaele Bombelli (1526-1573) propose alors de créer de nouveaux nombres, que l'on ne nomme pas encore nombres complexes, puis il définit dessus des règles pour les opérations d'addition et multiplication. Un nouvel ensemble de nombres était né !

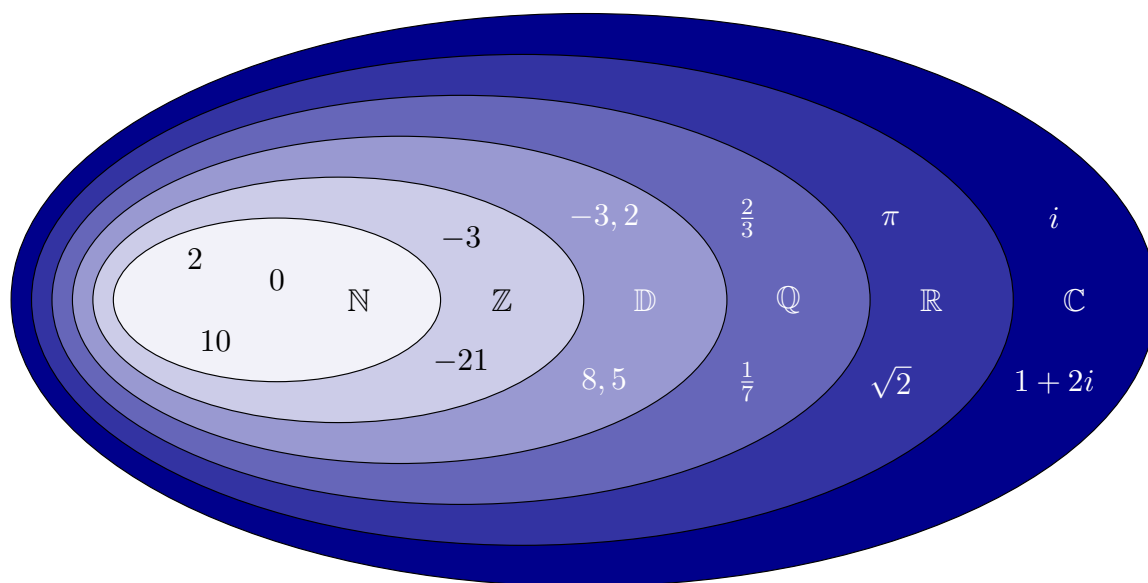
## I Découverte de l'ensemble $\mathbb{C}$

Il existe un ensemble de nombres, noté  $\mathbb{C}$ , appelé ensemble des nombres complexes qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$  contient  $\mathbb{R}$ .
- Dans  $\mathbb{C}$ , on définit une multiplication et une addition qui suivent les mêmes règles de calcul que dans  $\mathbb{R}$ .
- Dans cet ensemble  $\mathbb{C}$ , il existe un nombre noté  $i$ , tel que  $i^2 = -1$ .
- Tout élément  $z \in \mathbb{C}$  s'écrit de manière **unique**  $z = a + ib$  avec  $a$  et  $b$  réels.

Définition

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$



- On appelle **forme algébrique** d'un nombre complexe  $z$  l'écriture  $z = a + ib$  avec  $a$  et  $b$  réels.
- Soit un nombre complexe  $z = a + ib$ , on appelle **nombre complexe conjugué de  $z$** , le nombre noté  $\bar{z}$ , tel que  $\bar{z} = a - ib$ .

Définition

- Le nombre  $a$  s'appelle la partie réelle et la nombre  $b$  s'appelle la partie imaginaire. On note :  $\Re(z) = a$  et  $\Im(z) = b$
- Si l'on additionne un nombre complexe et son conjugué, on obtient le double de sa partie réelle :  $z + \bar{z} = 2a$

### Exemple

Voici quelques exemples de nombres complexes :

- $z = 2 + 3i$  la partie réelle est  $a = 2$  et la partie imaginaire  $b = 3$ .
- $z = 1 - i$  la partie réelle est  $a = 1$  et la partie imaginaire  $b = -1$ .
- $z = 2$  est un réel et  $z = 2i$  est un imaginaire pur.

**Opérations sur les nombres complexes** : soit  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$  deux nombres complexes (avec  $a, a', b$  et  $b'$  des réels). Alors :

- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

### Propriétés algébriques de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{C}$ :

soit  $z = a + ib$ ,  $z' = a' + ib'$  et  $z'' = a'' + ib''$  avec  $a, a', a'', b, b'$  et  $b''$  des réels.

- L'addition dans  $\mathbb{C}$  :
  - commutative :  $(a + ib) + (a' + ib') = (a' + ib') + (a + ib)$
  - associative :  $((a + ib) + (a' + ib')) + (a'' + ib'') = (a + ib) + ((a' + ib') + (a'' + ib''))$
  - d'élément neutre 0 :  $a + ib + 0 = 0 + a + ib = a + ib$
  - tout élément possède un opposé :  $(a + ib) + (-a - ib) = (a - a) + i(b - b) = 0$
- La multiplication dans  $\mathbb{C}$  :
  - commutative :  $(a + ib)(a' + ib') = (a' + ib')(a + ib)$
  - associative :  $((a + ib)(a' + ib'))(a'' + ib'') = (a + ib)((a' + ib')(a'' + ib''))$
  - distributive par rapport à l'addition :  $((a + ib) + (a' + ib'))(a'' + ib'') = (a'' + ib'')((a + ib) + (a' + ib')) = (a'' + ib'')(a + ib) + (a'' + ib'')(a' + ib')$
  - d'élément neutre 1 :  $(a + ib) \times 1 = 1 \times (a + ib) = a + ib$
  - tout élément possède un inverse sauf 0.

### Exemple

Démontrer les propriétés algébriques de l'addition et de la multiplication dans  $\mathbb{C}$ .

- Il n'existe pas de relation d'ordre dans  $\mathbb{C}$  qui prolonge celle de  $\mathbb{R}$ , autrement dit, on ne peut pas comparer deux nombres complexes si leurs parties imaginaires sont non nuls !
- On dit que l'ensemble  $\mathbb{C}$  muni de l'addition et de la multiplication est un corps commutatif.

**Inverse d'un nombre complexe non nul** : soit  $z = a + ib$  un nombre complexe non nul. Alors  $z$  admet un inverse que l'on note  $\frac{1}{z}$  et on a :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$$

**Exercice** : Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

a.  $z = 3 - 5i - (3i - 4)$

d.  $z = \frac{1}{4 - 2i}$

b.  $z = (3 - 2i)(-1 + 5i)$

e.  $z = \frac{1 + i}{2 - i}$

c.  $z = (2 - 3i)^2$

f.  $z = (2i)^{13}$

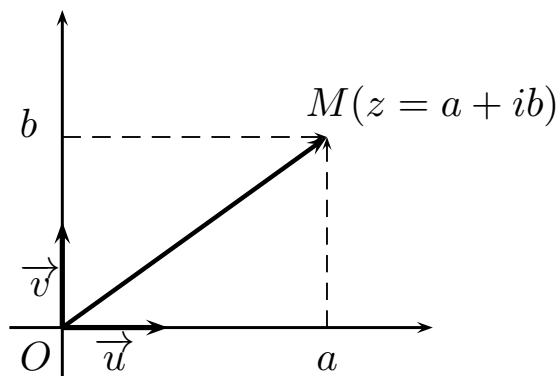
- Deux nombres complexes sont égaux, si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.
- Un nombre complexe est nul, si et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

Propriété

## II Découverte du plan complexe

Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  direct.

- À tout nombre complexe  $z = a + ib$  avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$ , on associe son **image**, le point  $M$  de coordonnées  $(a; b)$  et tout vecteur  $\vec{w}(a; b)$ .
- À tout point  $M(a; b)$  avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$ , et à tout vecteur  $\vec{w}(a; b)$ , on associe le nombre complexe  $z = a + ib$  appelé **affixe** du point  $M$  et **affixe** du vecteur  $\vec{w}$ .



Définition

Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses, que l'on appelle donc **axe réel**.

Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle,  $z = 0 + iy = iy$  est appelé un nombre **imaginaire pur**. Les images de ces nombres sont les points de l'axe des ordonnées, que l'on appelle donc **axe imaginaire (pur)**.

Définition

**Exercice** : plan complexe

Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixe respectif :  $z_A = -1 - 2i$ ,  $z_B = 4 - i$  et  $z_C = 6 + \frac{1}{2}i$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . Placer ensuite  $\overline{z_A}$ ,  $\overline{z_B}$  et  $\overline{z_C}$ .

## II.1 Propriétés du conjugués

### Propriété

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$  avec  $z \neq 0$ .
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$  avec  $z' \neq 0$ .
- Soit  $z = a + ib$  alors  $z\overline{z} = a^2 + b^2$ .
- $n \in \mathbb{N}$ ,  $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$

### Démonstration

On pose  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$  avec  $a, a', b$  et  $b'$  des réels.

- $\overline{\overline{z}} = \overline{a + ib} = \overline{a - ib} = a + ib = z$
- $\overline{z + z'} = \overline{(a + ib) + (a' + ib')} = \overline{(a + a') + i(b + b')} = (a + a') - i(b + b') = (a - ib) + (a' - ib') = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{(a + ib)(a' + ib')} = \overline{aa' - bb' + i(ab' + a'b)} = (aa' - bb') - i(ab' + a'b) = (a - ib)(a' - ib') = \overline{z}\overline{z'}$
- $z \neq 0$ ,  $z \times \frac{1}{z} = \overline{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = 1$  Donc  $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$
- $z \neq 0$  et  $z' \neq 0$ ,  $z \times \frac{1}{z'} = \overline{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \overline{z} \times \frac{1}{\overline{z'}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$
- Récurrence à partir du point 3.

### Exemple

Soit  $z = a + ib$  avec  $a$  et  $b$  réels.

Calculer  $\frac{z + \overline{z}}{2}$ , puis  $\frac{z - \overline{z}}{2i}$ . Que remarque-t-on ?

### Théorème

**Caractérisation d'un réel, d'un imaginaire pur** Soit  $z$  un nombre complexe alors :

- $z \in \mathbb{R}$  ssi  $\overline{z} = z$
- $z \in i\mathbb{R}$  ssi  $\overline{z} = -z$

### Exemple

Démontrer le théorème précédent.

## III Formule du binôme de Newton

### Théorème

**Le binôme de Newton** : soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a + b)^n$$

On note pour tout entier naturel  $n$  la proposition  $P(n) : \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$ .

**Initialisation :**

rang  $n = 0$ .

$\binom{0}{0} a^0 b^0 = (a+b)^0 = 1$  La propriété est donc vraie au rang  $n = 0$ .

**Hérédité :**

Supposons  $P(n)$  vraie pour un certain rang  $n \geq 0$  et montrons que cela implique  $P(n+1)$  vrai.

$$\begin{aligned}
 P(n) \text{ vraie} &\iff \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n \\
 &\iff (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^{n+1} \\
 &\iff \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} = (a+b)^{n+1} \\
 &\iff \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-(k-1)} = (a+b)^{n+1} \\
 &\iff a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n-(k-1)} = (a+b)^{n+1} \\
 &\iff \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} = (a+b)^{n+1}
 \end{aligned}$$

**Conclusion :**

$P(n)$  vraie  $\implies P(n+1)$  vraie. La propriété est donc héréditaire à partir du rang  $n = 0$ .

D'après le principe de récurrence :  $\forall n \geq 0, P(n)$  est vraie.

La propriété est ainsi démontrée.

En changeant  $b$  en  $-b$  dans la formule du binôme de Newton, on obtient le développement de  $(a-b)^n$  :

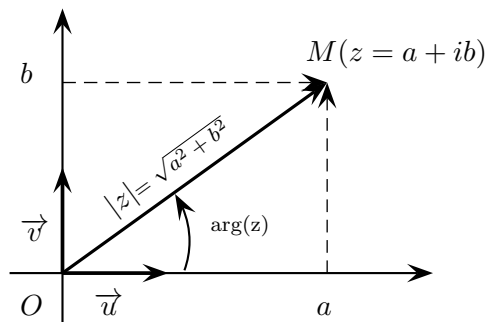
$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k (-b)^{n-k}$$

## IV Module et argument d'un nombre complexe

### Définition

Soit dans le plan complexe un point  $M$  d'affixe  $z = a + ib$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

- On appelle **module** de  $z$  le nombre **réel positif**  $\sqrt{a^2 + b^2}$  noté  $|z|$ . Cette valeur est égale à la distance  $OM$ .
- On appelle **argument** du nombre complexe non nul  $z$ , noté  $\arg(z)$ , toute mesure en radians de l'angle orienté :  $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ . On a donc
 
$$\begin{cases} \cos(\theta) &= \frac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) &= \frac{b}{|z|} \end{cases}$$



### Remarque

Un nombre complexe non nul  $z$  a une infinité d'arguments : si  $\theta$  est un de ces arguments, alors tous les autres sont de la forme  $\theta + k2\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

On note  $\arg(z) = \theta$  (modulo  $2\pi$ ), ou  $\arg(z) = \theta [2\pi]$ , ou encore, pour simplifier (mais alors par abus de langage),  $\arg(z) = \theta$ .

### Propriété

Pour tout nombres complexes  $z$  et  $z'$  :

- si  $z = a + ib$ ,  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$ ,  $z\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$
- $|z| = 0$  ssi  $z = 0$
- $|-z| = |z|$  et  $|\bar{z}| = |z|$
- $|zz'| = |z||z'|$  et  $|z^n| = |z|^n$  et  $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$  avec ( $z' \neq 0$ )
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$  (inégalité triangulaire)

soit  $z = a + ib$ ,  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$  et  $z' = a' + ib'$ ,  $a' \in \mathbb{R}$  et  $b' \in \mathbb{R}$

- $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$  et  $|z|^2 = \sqrt{a^2 + b^2}^2 = a^2 + b^2$
- $|z| = 0$  ssi  $\sqrt{a^2 + b^2} = 0$  ssi  $a^2 + b^2 = 0$  ssi  $a^2 = -b^2$  or  $a$  et  $b$  sont deux réels, donc  $a = b = 0$ .
- $|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$  (même raisonnement pour  $|\bar{z}|$ ).
- $|zz'| = |(a + ib)(a' + ib')| = |aa' + iab' + ia'b - bb'| = \sqrt{(aa' - bb')^2 + (ab' + a'b)^2}$  et  $|z| \times |z'| = \sqrt{a^2 + b^2} \times \sqrt{a'^2 + b'^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} = \sqrt{a^2 a'^2 + a^2 b'^2 + b^2 b'^2 + b^2 a'^2} = \sqrt{(aa' - bb')^2 + (ab' + a'b)^2}$
- Soit  $z \neq 0$ ,  $\left|\frac{z}{z}\right| = |z| \times \left|\frac{1}{z}\right| = 1$  Donc  $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$  on en déduit immédiatement  $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$ .
- On montre par récurrence  $|z^n| = |z|^n$
- $|z + z'|^2 = (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') = |z|^2 + |z'|^2 + z\bar{z}' + z'\bar{z} = |z|^2 + |z'|^2 + 2\Re(z\bar{z}') \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z\bar{z}'| = |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'| = (|z| + |z'|)^2$   
Donc  $|z + z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2$  D'où  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

### Exemple

Représenter puis déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

a.  $z_1 = 1 + i$

b.  $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

c.  $z_3 = -3i$

Calculer :

a.  $|3 - 2i|$

c.  $|\sqrt{2} + i|$

d.  $\left|\frac{-3i}{(\sqrt{2} + i)^2}\right|$

b.  $|\overline{-3i}|$

Placer les nombres complexes suivants dans le plan complexe :

a.  $z_1$  tel que  $|z_1| = 2$  et  $\arg(z_1) = \frac{\pi}{2}$

c.  $z_3$  tel que  $|z_3| = 3$  et  $\arg(z_3) = \frac{3\pi}{4}$

b.  $z_2$  tel que  $|z_2| = 1$  et  $\arg(z_2) = \frac{\pi}{4}$

d.  $z_4$  tel que  $|z_4| = 4$  et  $\arg(z_4) = \frac{\pi}{3}$

### Exemple

Démontrer les inégalités suivantes :  $||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$

Le mot de la fin : les nombres remarquables sont de sortie en discothèque.  $e$  et  $\pi$  s'amuse comme des fous, mais  $i$  reste scotché au bar.  $e$  va alors voir  $i$  et lui dit : « Allez, viens dans  $\mathbb{C}$  ! »