Version 250106

LABOR ET DILECTIO — PAU 1884

2024/2025

Lois discrètes

Le mathématicien et physicien hollandais Christian Huygens introduit la notion d'espérance mathématiques dans un livre publié en 1657 et consacré aux probabilités ; c'est le premier ouvrage jamais écrit sur ce thème. Pour nommer ce nouveau concept, il hésite entre les mots latins *spes* et *expectatio* signifiant respectivement *espoir* et *espérance*. Christian Huygens est également célèbre pour ses travaux sur la chute des corps, sur le pendule et pour son invention de l'horloge.

I Variables aléatoires discrètes

Définition

- On appelle **variable aléatoire réelle** toute fonction à valeurs réelles définie sur Ω.
  Les variables aléatoires sont en général désignées par des majuscules comme X, Y ou Z.
- Une variable aléatoire est dite **discrète** lorsque l'ensemble des valeurs possibles est discret, c'est-à-dire uniquement constitué de valeurs ponctuelles isolées.
  En particulier, si X ne prend que des valeurs entières, X est une variable aléatoire réelle discrète. Évidemment, lorsque Ω est fini, toute variable aléatoire réelle est nécessairement finie donc discrète.

II Espérance d'une variable aléatoire.

Définition

L'espérance mathématique de X est :

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + ... + x_n \times P(X = x_n)$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i)$$

L'espérance est la moyenne que l'on peut espérer si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois.

Exemple

Soit l'expérience aléatoire : « On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. »
On considère le jeu suivant :

- Si on tire un cœur, on gagne 2 euros.
- Si on tire un roi, on gagne 5 euros.
- Si on tire une autre carte, on perd 1 euros.

On appelle X la variable aléatoire qui à une carte tirée associe un gain ou une perte.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

III Loi uniforme discrète

Définition

On dit que X suit une **loi uniforme discrète** sur l'ensemble $\{1, ..., n\}$ si pour tout entier i de $\{1, ..., n\}$, on a : $P(X = i) = \frac{1}{n}$.

Exemple

- On lance un dé et on appelle X le résultat du lancer.
  Alors $P(X = 1) = P(X = 2) = ... = P(X = 6) = \frac{1}{6}$.
  On dira que X suit une loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- On lance une pièce de monnaie. La probabilité d'obtenir « pile »est égale à la probabilité d'obtenir « face », toutes deux égales à $\frac{1}{2}$
  Dans ce cas, X suit également une loi uniforme.

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme discrète de paramètre n, alors :

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

Démontrer la propriété précédente.

IV Répétition d'expériences indépendantes

Définition

Plusieurs expériences sont identiques et indépendantes si :

- elles ont les mêmes issues,
- les probabilités de chacune des issues ne changent pas d'une expérience à l'autre.

Exemple

- On lance un dé plusieurs fois de suite et on note à chaque fois le résultat. On répète ainsi la même expérience (lancer un dé) et les expériences sont indépendantes l'une de l'autre (un lancer n'influence pas le résultat d'un autre lancer).
- Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète cette expérience 10 fois de suite. Ces expériences sont identiques et indépendantes.

Propriété

On considère une expérience aléatoire à deux issues A et B avec les probabilités P(A) et P(B). Si on répète l'expérience deux fois de suite de façon indépendante :

- la probabilité d'obtenir l'issue A suivie de l'issue B est égale à $P(A) \times P(B)$,
- la probabilité d'obtenir l'issue B suivie de l'issue A est égale à $P(B) \times P(A)$,
- la probabilité d'obtenir deux fois l'issue A est égale à $P(A)^2$
- la probabilité d'obtenir deux fois l'issue B est égale à $P(B)^2$.

Exercice :
On considère l'expérience suivante :
Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète l'expérience deux fois de suite.

a. Représenter l'ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.

b. Déterminer la probabilité :

   (a) d'obtenir deux boules blanches;

   (b) une boule blanche et une boule rouge;

   (c) au moins une boule blanche.

V Loi de Bernoulli

Définition

- On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire qui admet deux issues, l'une étant appelée arbitrairement « le succès », l'autre « l'échec ».
- Généralement, on désignera le succès par la lettre S et on notera $P(S) = p$. De plus, l'échec sera désigné par $\overline{S}$. On a alors $P(\overline{S}) = 1 - p$.
- On dit que X suit une **loi de Bernoulli de paramètre p** lorsque X prend la valeur 1 avec une probabilité p et prend la valeur 0 avec une probabilité $1 - p$.

Exemple

- Le jeu du pile ou face : On considère par exemple comme succès "obtenir pile" et comme échec "obtenir face". Ici $p = \dfrac{1}{2}$.
- On lance un dé et on considère par exemple comme succès "obtenir un six" et comme échec "ne pas obtenir un six". Ici $p = \dfrac{1}{6}$.

Propriété

Espérance et écart-type d'une loi de Bernoulli. Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors :

$$E(X) = p \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$$

Démontrer la propriété précédente.

VI Schéma de Bernoulli, loi binomiale

Définition

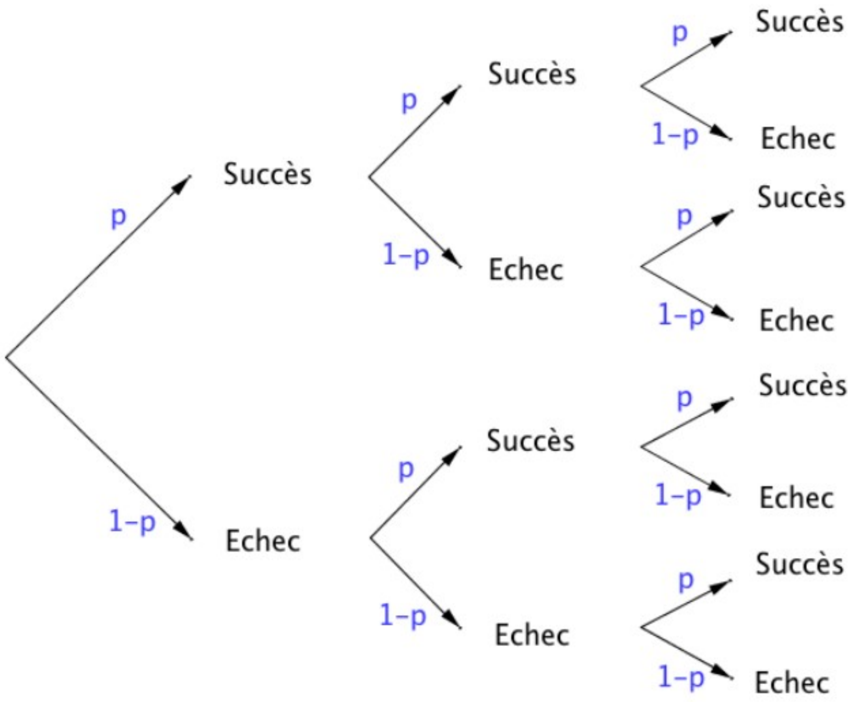
- On dit qu'il y a répétition d'expériences aléatoires **identiques** lorsqu'une même expérience aléatoire est répétée plusieurs fois, dans les mêmes conditions.
- Des expériences aléatoires sont dites **indépendantes** lorsque le résultat de l'une quelconque d'entre elles est indépendant du résultat des autres expériences.

Définition

- On appelle **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p, toute répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre p.
- Soit n, k des entiers naturels. On appelle coefficient binomial, on note $\dbinom{n}{k}$ et on lit « k parmi n »le nombre de chemins comportant k succès parmi n épreuves répétées dans un schéma de Bernoulli.

Exemple

La répétition de 10 lancers d'une pièce de monnaie est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{1}{2}$
n et p sont les paramètres de la loi binomiale et que l'on note $B(n;p)$.
On a représenté dans un arbre de probabilité les issues d'une expérience suivant un schéma de Bernoulli composé de 3 épreuves de Bernoulli de paramètre p. X est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès.



Dans cette exemple, $P(X = 3) = p \times p \times p = p^3$. En effet, en suivant les branches sur le haut de l'arbre, on arrive à 3 succès.
On a également :
$P(X = 1) = p \times (1-p) \times (1-p) + (1-p) \times p \times (1-p) + (1-p) \times (1-p) \times p = 3p(1-p)^2$
En effet, les chemins permettant la réalisation de 1 succès sont SEE, ESE et EES.

Remarque

Pour tout entier naturel n :

$$\binom{n}{0} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{n} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{1} = n$$

- Il n'y a qu'un seul chemin correspondant à 0 succès parmi n épreuves : (Échec, Échec, ... , Échec)
- Il n'y a qu'un seul chemin correspondant à n succès parmi n épreuves : (Succès, Succès, ... , Succès)
- Il n'y a n chemins correspondant à 1 succès parmi n épreuves : (Succès, Échec, Échec, ... , Échec) (Échec, Succès, Échec, ... , Échec) (Échec, Échec, Succès, ... , Échec) ... (Échec, Échec, Échec, ... , Succès)

VI.1 Utilisation de la calculatrice

On lance 7 fois de suite un dé à 6 faces. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois que le dé affiche un nombre supérieur ou égal à 3.

a. Quelle est la loi suivie par X ?

b. Calculer la probabilité $P(X = 5)$

c. Calculer la probabilité $P(X \leq 5)$

d. Calculer la probabilité $P(X \geq 3)$

e. Représenter graphiquement la loi suivie par X par un diagramme en bâtons.

Pour répondre aux questions b, c, d et e, il faudra lire le manuel de votre calculatrice ou faire quelques recherches.

Théorème

Soit n et p deux entiers naturels non nuls, $0 \leq k \leq p$. On suppose que X suit une loi $B(n;p)$. Alors, $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Propriété

Espérance et écart-type d'une loi binomiale : Si X suit une loi $B(n;p)$ alors :

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

Exemple

On lance 5 fois un dé à six faces. On considère comme succès le fait d'obtenir 5 ou 6. On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de succès.
Calculer l'espérance et l'écart type. Interpréter le résultat obtenu.

VI.2 Coefficients binomiaux

Propriété

Symétrie des coefficients binomiaux

Pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$, on a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Relation de Pascal

Pour tous entiers n et k, on a :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Le triangle de Pascal :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	$\dots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Exemple

Calculer les coefficients binomiaux suivants :

a. $\binom{100}{1}$

b. $\binom{7}{6}$

c. $\binom{25}{24}$

d. $\binom{4}{2}$

e. $\binom{7}{2}$

f. $\binom{8}{3}$

Exemple

Une urne contient 5 boules gagnantes et 7 boules perdantes. Une expérience consiste à tirer au hasard 4 fois de suite une boule et de la remettre. On appelle X la variable aléatoire qui associe le nombre de tirages gagnants.

a. Montrer que X suit une loi binomiale

b. Déterminer la loi de probabilité de X

c. Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules gagnantes.