



LOI DE BERNOULLI

I Variables aléatoires discrètes

- On appelle **variable aléatoire réelle** toute fonction à valeurs réelles définie sur Ω . Les variables aléatoires sont en général désignées par des majuscules comme X , Y ou Z .
- Une variable aléatoire est dite **discrète** lorsque l'ensemble des valeurs possibles est discret, c'est-à-dire uniquement constitué de valeurs ponctuelles isolées. En particulier, si X ne prend que des valeurs entières, X est une variable aléatoire réelle discrète. Évidemment, lorsque Ω est fini, toute variable aléatoire réelle est nécessairement finie donc discrète.

Définition

II Espérance d'une variable aléatoire.

L'espérance mathématique de X est :

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \dots + x_n \times P(X = x_n)$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \times P(X = x_i)$$

L'espérance est la moyenne que l'on peut espérer si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois.

Définition

Exemple

Soit l'expérience aléatoire : « On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. »

On considère le jeu suivant :

- Si on tire un cœur, on gagne 2 euros.
- Si on tire un roi, on gagne 5 euros.
- Si on tire une autre carte, on perd 1 euros.

On appelle X la variable aléatoire qui à une carte tirée associe un gain ou une perte.

- Déterminer la loi de probabilité de X .
- Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

III Répétition d'expériences indépendantes

Plusieurs expériences sont identiques et indépendantes si :

- elles ont les mêmes issues,
- les probabilités de chacune des issues ne changent pas d'une expérience à l'autre.

Définition

Exemple

- On lance un dé plusieurs fois de suite et on note à chaque fois le résultat. On répète ainsi la même expérience (lancer un dé) et les expériences sont indépendantes l'une de l'autre (un lancer n'influence pas le résultat d'un autre lancer).
- Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète cette expérience 10 fois de suite. Ces expériences sont identiques et indépendantes.

Propriété

On considère une expérience aléatoire à deux issues A et B avec les probabilités $P(A)$ et $P(B)$. Si on répète l'expérience deux fois de suite de façon indépendante :

- la probabilité d'obtenir l'issue A suivie de l'issue B est égale à $P(A) \times P(B)$,
- la probabilité d'obtenir l'issue B suivie de l'issue A est égale à $P(B) \times P(A)$,
- la probabilité d'obtenir deux fois l'issue A est égale à $P(A)^2$
- la probabilité d'obtenir deux fois l'issue B est égale à $P(B)^2$.

Exercice :

On considère l'expérience suivante :

Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète l'expérience deux fois de suite.

- Représenter l'ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.
- Déterminer la probabilité :
 - d'obtenir deux boules blanches ;
 - une boule blanche et une boule rouge ;
 - au moins une boule blanche.

IV Loi de Bernoulli

Définition

- On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire qui admet deux issues, l'une étant appelée arbitrairement « le succès », l'autre « l'échec ».
- Généralement, on désignera le succès par la lettre S et on notera $P(S) = p$. De plus, l'échec sera désigné par $\bar{S}$. On a alors $P(\bar{S}) = 1 - p$.
- On dit que X suit une **loi de Bernoulli de paramètre p** lorsque X prend la valeur 1 avec une probabilité p et prend la valeur 0 avec une probabilité $1 - p$.

Exemple

- Le jeu du pile ou face : On considère par exemple comme succès "obtenir pile" et comme échec "obtenir face". Ici $p = \frac{1}{2}$.
- On lance un dé et on considère par exemple comme succès "obtenir un six" et comme échec "ne pas obtenir un six". Ici $p = \frac{1}{6}$.

Propriété

Espérance et écart-type d'une loi de Bernoulli. Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p , alors :

$$E(X) = p \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$$

Démontrer la propriété précédente.

V Schéma de Bernoulli, loi binomiale

- On dit qu'il y a répétition d'expériences aléatoires **identiques** lorsqu'une même expérience aléatoire est répétée plusieurs fois, dans les mêmes conditions.
- Des expériences aléatoires sont dites **indépendantes** lorsque le résultat de l'une quelconque d'entre elles est indépendant du résultat des autres expériences.

Définition

On appelle **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p , toute répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre p .

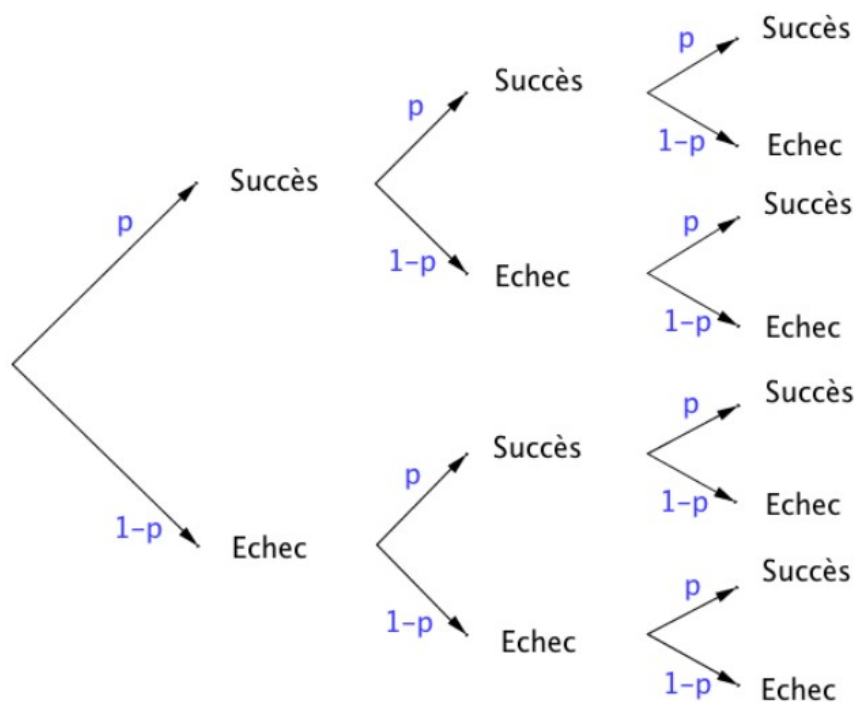
Définition

Exemple

La répétition de 10 lancers d'une pièce de monnaie est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{2}$

n et p sont les paramètres de la loi binomiale et que l'on note $B(n; p)$.

On a représenté dans un arbre de probabilité les issues d'une expérience suivant un schéma de Bernoulli composé de 3 épreuves de Bernoulli de paramètre p . X est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès.



Dans cet exemple, $P(X = 3) = p \times p \times p = p^3$. En effet, en suivant les branches sur le haut de l'arbre, on arrive à 3 succès.

On a également :

$$P(X = 1) = p \times (1 - p) \times (1 - p) + (1 - p) \times p \times (1 - p) + (1 - p) \times (1 - p) \times p = 3p(1 - p)^2$$

En effet, les chemins permettant la réalisation de 1 succès sont SEE, ESE et EES.