Version 230413

2022/2023

Lois à densité

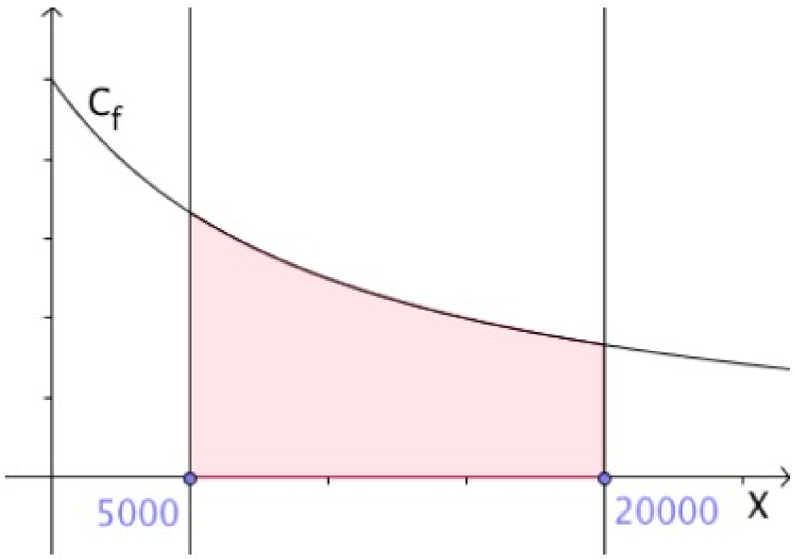
I Loi de probabilité à densité

Exemple

Une entreprise fabrique des disques durs.
On définit une variable aléatoire qui, à chaque disque dur, associe sa durée de vie en heures.
Cette durée n'est pas nécessairement un nombre entier et peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle $[0; +\infty[$.
Une telle variable aléatoire est dite **continue**.

> **Remarque**
> Dans le cas d'une variable aléatoire continue qui prend pour valeurs les réels d'un intervalle I, sa loi de probabilité n'est pas associée à la probabilité de chacune de ses valeurs (comme dans le cas discret) mais à la probabilité de tout intervalle inclus dans I. On a ainsi recours à une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et appelée **fonction de densité**.

Dans l'exemple précédent, on peut par exemple calculer $P(5000 \leq X \leq 20000)$ correspondant à la probabilité que la durée de vie d'un disque dur soit comprise entre 5000 heures et 20000 heures.
Pour cela, on utilise la fonction de densité f définissant la loi de probabilité.
La probabilité $P(5000 \leq X \leq 20000)$ est l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction de densité et les droites d'équations $x = 5000$ et $x = 20000$.



On a donc :

$$P(5000 \leq X \leq 20000) = \int_{5000}^{20000} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Définition

On appelle **fonction à densité** (ou densité) toute fonction f définie, continue et positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que l'intégrale de f sur I soit égale à 1.
Si X est une variable aléatoire continue sur $[a;b]$, la probabilité de l'événement $\{X \in [a;b]\}$, où $[a;b]$ est un intervalle de I, est égale à l'aire sous la courbe de f sur $[a;b]$, soit :

$$P(X \in [a;b]) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple

Démontrer que la fonction f définie sur $[2;4]$ par $f(x) = 0,5x - 1$ est une fonction de densité.

Définition

Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité f sur un intervalle $[a;b]$.
Alors pour tout x de $[a;b]$, on a $P(X \leq x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$
La fonction définie sur $[a;b]$ par $x \mapsto P(X \leq x)$ est appelée **fonction de répartition de X**.

Définition

Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité f sur un intervalle $[a;b]$.
L'espérance mathématiques de X est : $E(X) = \displaystyle\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t$
La variance de X est : $V(X) = \displaystyle\int_a^b (t - E(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t$

Exemple

Une entreprise produit des dalles en plâtre suivant une variable aléatoire continue X, en tonnes, qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0;20]$ avec une densité de probabilité f définie par : $f(x) = 0,015x - 0,00075x^2$

a. Vérifier que f est une densité de probabilité sur $[0;20]$.

b. Calculer la probabilité de l'événement E " La production quotidienne est supérieure ou égale à 12 tonnes ".

c. Calculer l'espérance mathématique de X.

II Loi uniforme

II.1 Loi uniforme sur $[0;1]$

Exemple

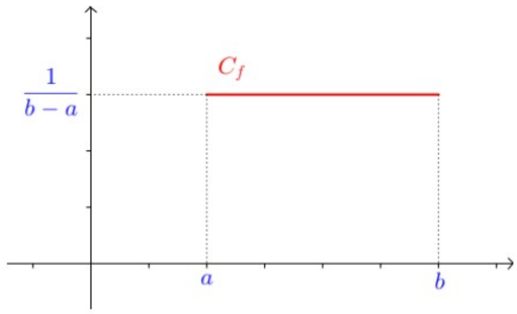
Des machines remplissent des bouteilles de lait de 1 litre. L'une d'entre elles est défectueuse et, au passage de chaque bouteille, elle se bloque après une quantité aléatoire de lait versée et comprise entre 0 et 1 litre.
Soit X la quantité de lait versée par la machine défectueuse.
On dit que X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$.

Définition

La loi uniforme sur $[0;1]$, notée $U([0;1])$, est la loi ayant pour densité de probabilité la fonction constante f définie sur $[0;1]$, par $f(x) = 1$.

II.2 Loi uniforme sur $[a; b]$

Soient a et b deux nombres réels tel que $a < b$.
La loi uniforme sur $[a; b]$, notée $U([a; b])$, est la loi ayant pour densité de probabilité la fonction constante f définie sur $[a; b]$, par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$.



Définition

II.3 Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme $U([a; b])$.
Alors pour tout x appartenant à $[a; b]$ on a

$$P(a \leq X \leq x) = \frac{x-a}{b-a}$$

.

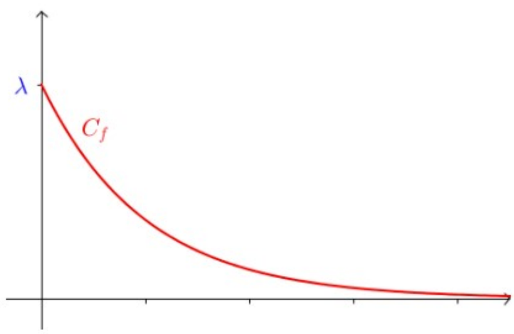
$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Propriété

III Loi exponentielle

Soit λ un réel strictement positif.
La loi exponentielle de paramètre λ est la loi ayant pour densité de probabilité la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$



Définition

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.
Alors, pour tout x de $[0; +\infty[$, on a : $P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$ et $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Propriété

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.
Alors, pour tout réel t et h positifs, on a : $P_{X \geq t}(X \geq t+h) = P(X \geq h)$.

Remarque

Cette propriété porte le nom « d'absence de mémoire » ou « de durée de vie sans vieillissement » car elle montre que la durée de vie sur une période h ne dépend pas de l'âge t à partir duquel on considère cet événement.

Exemple

La durée de vie, exprimée en heures, d'un petit composant électronique d'une carte d'anniversaire musicale est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0035$. Sachant qu'un composant testé a fonctionné plus de 200 heures, calculer la probabilité qu'il tombe en panne avant 300 heures.