Version 241204

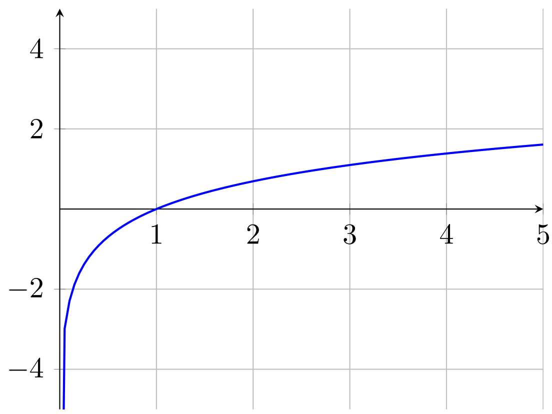
2024/2025

Logarithme népérien

I Présentation du logarithme népérien

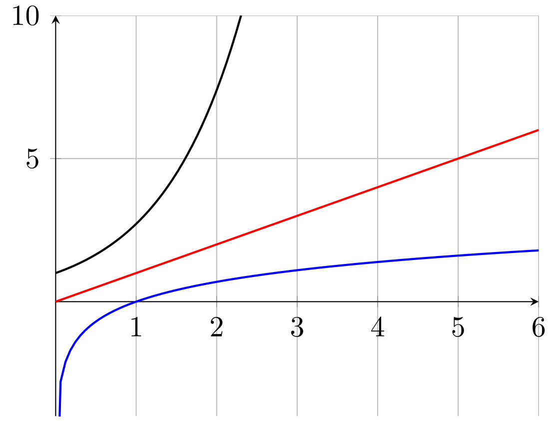
Définition

Pour tous réel $a \in]0;+\infty[$, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
On appelle logarithme népérien d'un réel strictement positif a, l'unique solution de l'équation $e^x = a$. On le note $\ln(a)$.
La fonction logarithme népérien est définie sur $]0;+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.



Remarque

- Les fonctions exponentielles et logarithme népérien sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.
- Les courbes représentatives de ces deux fonctions sont donc symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
- Dans le domaine scientifique, on utilise la fonction logarithme décimale, notée log est définie par : $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$



Propriété

On a donc les propriétés suivantes :

a. Pour $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.

b. $\ln(1) = 0$; $\ln(e) = 1$; $\ln(\frac{1}{e}) = -1$

c. $\ln(e^x) = x$

d. Pour $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$

II Les propriétés du logarithme népérien

Théorème

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$

Conséquences :

- $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$
- $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$ avec $n \in \mathbb{N}$
- $\ln(a^x) = x\ln(a)$ avec $x \in \mathbb{R}$

Exemple

Simplifier les expressions suivantes :

a. $A = \ln(3 - \sqrt{5}) + \ln(3 + \sqrt{5})$

b. $B = 3\ln(2) + \ln(5) - 2\ln(3)$

c. $C = \ln(e^2) - \ln(\frac{2}{e})$

Propriété

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

$\ln(a) = \ln(b) \longleftrightarrow a = b$

$\ln(a) < \ln(b) \longleftrightarrow a < b$

Exemple

Résoudre les équations et inéquations suivantes dans I :

a. $\ln(x) = 2$ avec $I =]0; +\infty[$

b. $e^{x+1} = 5$ avec $I = \mathbb{R}$

c. $3\ln(x) - 4 = 8$ avec $I =]0; +\infty[$

d. $\ln(6x - 1) \geq 2$ avec $I =]\frac{1}{6}; +\infty[$

e. $e^x + 5 > 4e^x$ avec $I = \mathbb{R}$

III La fonction logarithme népérien

Propriété

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0; +\infty[$ sa dérivée est $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

Exemple

Dériver la fonction suivante sur $]0;+\infty[$: $y = \dfrac{\ln(x)}{x}$

Propriété

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Dresser le tableau de variations de la fonction logarithme népérien.

Les limites aux bornes sont : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$

Exemple

Déterminer les variations de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 3 - x + 2\ln(x)$.

Exemple

Étudier la position relative de la courbe de la fonction logarithme et de la droite d'équation $y = x$.