Version 261007

2026/2027

Limites des fonctions

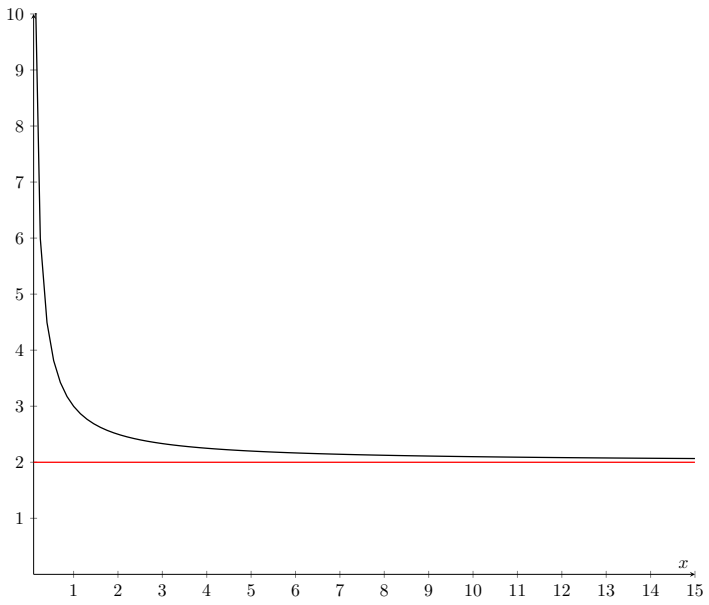
Souvent surnommé le père de l'analyse moderne **Karl Weierstrass** est un mathématicien atypique. Il n'obtient un poste à l'université qu'à l'âge de quarante-neuf ans. Il est pourtant investi dans les recherches mathématiques dès la fin de ses études. Il donne une définition de la notion de limite ainsi que de celle de continuité très proches de celles que nous utilisons aujourd'hui. Il publie très peu et ses découvertes sont connues aujourd'hui grâce à ses élèves.

I Limite à l'infini

I.1 Limite finie

Exemple

On a représenté en noir ci-dessous la fonction f définie par $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0; 15]$.
En rouge, on a représenté la fonction constante $y = 2$.
On constate que la fonction f se rapproche rapidement de la droite. Autrement dit, la distance entre la droite et la courbe représentative de f tend vers 0 lorsque x grandit.
On dit alors que la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$ est 2.



Définition

- La droite d'équation $y = L$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.
- La droite d'équation $y = L$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$ si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

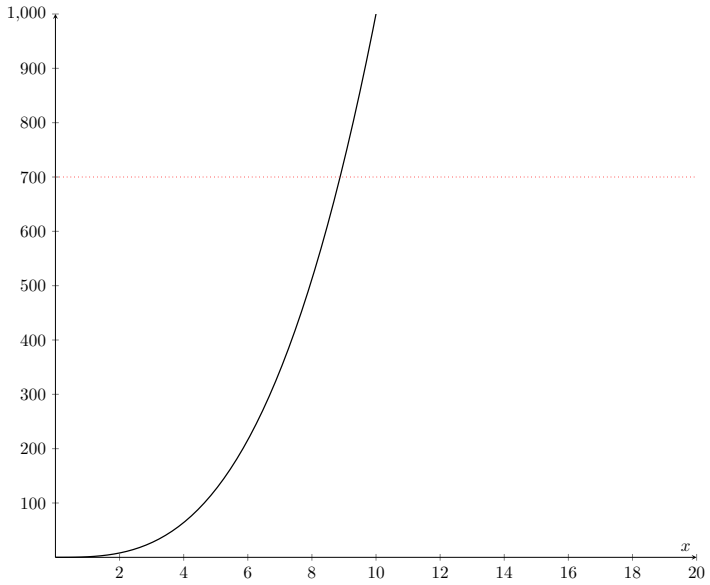
Remarque

Dans l'exemple ci-dessus, l'asymptote horizontale de f en $+\infty$ est $y = 2$.
On constate que la courbe se rapproche donc de son asymptote horizontale en $+\infty$.

I.2 Limite infinie

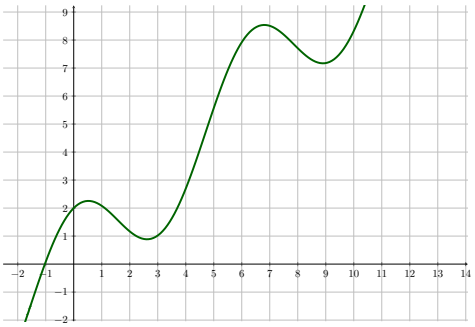
Exemple

On a représenté en noir ci-dessous la fonction f définie par $f(x) = x^3$ sur l'intervalle $[0; 20]$.
On constate que quelque soit le réel A choisit, il est possible de trouver un x tel que $f(x)$ soit plus grand que A.



Remarque

- Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas obligatoirement croissante !
  Voici un exemple ci-dessous avec $f(x) = 2\cos(x) + x$:



- Certaine fonction n'ont pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$, c'est le cas par exemple pour les fonction $y = \cos(x)$ et $y = \sin(x)$.

I.3 Limites à connaître

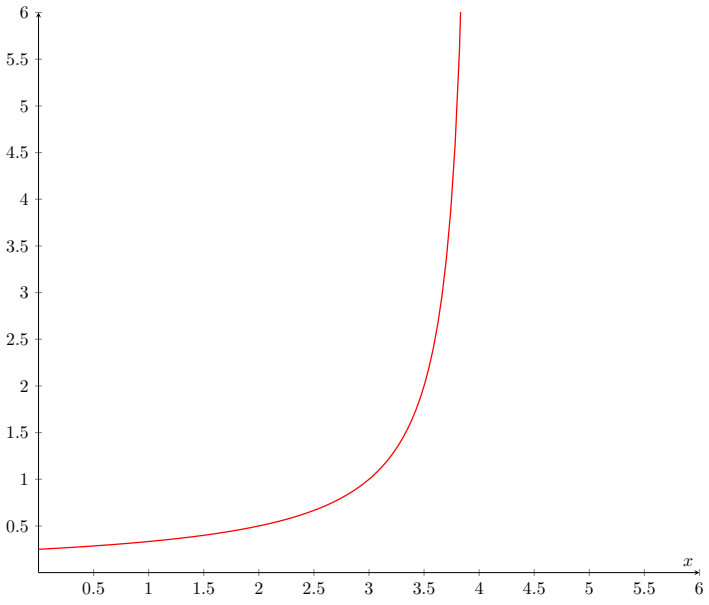
Propriété

- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

II Limite en un réel

Exemple

On a représenté en rouge ci-dessous la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{4\}$ par $f(x) = -\frac{1}{x-4}$.
On constate que la fonction f tend vers $+\infty$ lorsque x se rapproche de 4.

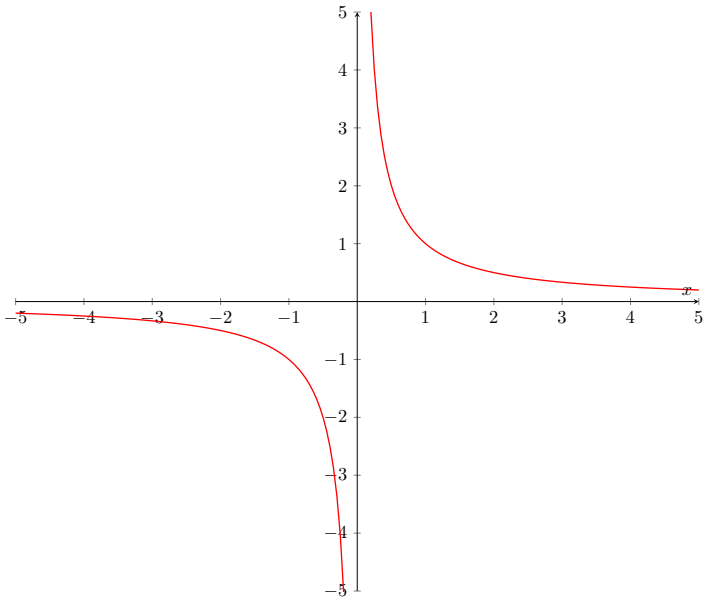


Définition

- La droite d'équation $x = A$ avec $A \in \mathbb{R}$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f en A si $\lim\limits_{x\to A} f(x) = +\infty$.
- La droite d'équation $x = A$ avec $A \in \mathbb{R}$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f en A si $\lim\limits_{x\to A} f(x) = -\infty$.

Remarque

Certaines fonctions n'ont pas la même limite à " droite " ou à " gauche " de A.
Par exemple, la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ a une limite à gauche de 0, et une limite à droite de 0 :



$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

III Opérations sur les limites

Somme de limites : $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) + g(x)$

Soit L, la limite de la suite $f(x)$, et L' la limite de la suite $g(x)$ lorsque x tend vers α.
α peut désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un réel a.

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$L' \in \mathbb{R}$	$L' = +\infty$	$L' = -\infty$
$L \in \mathbb{R}$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$
$L = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**FI**
$L = -\infty$	$-\infty$	**FI**	$-\infty$

Produit de limites : $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) \times g(x)$

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$L' \in \mathbb{R}^*$	$L' = 0$	$L' = \pm\infty$
$L \in \mathbb{R}^*$	$L \times L'$	0	$\pm\infty$
$L = 0$	0	0	**FI**
$L = \pm\infty$	$\pm\infty$	**FI**	$\pm\infty$

Quotient de limites : $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{g(x)}{f(x)}$

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$L' \in \mathbb{R}^*$	$L' = 0$	$L' = \pm\infty$
$L \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{L'}{L}$	0	$\pm\infty$
$L = \pm\infty$	0	0	**FI**

FI est une forme indéterminée.
$\pm\infty$ se détermine à l'aide de la règle des signes.

Exemple

Calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-5)(3+x^2)$

b. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1-2x}{x-1}$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3+2x^2-6x+1$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-2}{1-x}$
Démontrer que la courbe représentative de la fonction f admet des asymptotes dont on précisera les équations.

Exemple

Méthode de composition : Soit f la fonction définie sur $]\dfrac{1}{2};+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{2-\dfrac{1}{x}}$
Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Exemple

Méthode de comparaison : Calculer la limite de $f(x) = \sin(x) + x$ lorsque x tend vers $+\infty$.