



Exercices

INTÉGRATION

Exercice 1/36

1. Soit f la fonction définie sur $[-3; 1]$ par $f(x) = 2$
 - (a) Tracer dans un repère la représentation graphique de f .
 - (b) Déterminer $\int_{-3}^1 f(x) dx$
2. Soit g la fonction définie sur $[1; 5]$ par $f(x) = x - 1$
 - (a) Tracer dans un repère la représentation graphique de g .
 - (b) Déterminer $\int_1^5 g(x) dx$
3. Soit h la fonction définie sur $[-2; 2]$ par $h(x) = |x|$
 - (a) Tracer dans un repère la représentation graphique de h .
 - (b) Déterminer $\int_{-2}^2 h(x) dx$
4. Soit k la fonction définie sur $[-2; 3]$ par $k(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 < x \leq 3 \end{cases}$
 - (a) Tracer dans un repère la représentation graphique de k .
 - (b) Déterminer $\int_{-2}^3 k(x) dx$

Exercice 2/36

Soit F la fonction définie sur $[-2; +\infty[$ par $F(x) = \int_{-2}^x \sqrt{t+2} dt$.

1. Donner une interprétation graphique de $F(2)$ et $F(3)$ puis comparer ces deux nombres.
2. Déterminer la dérivée de la fonction F sur $] - 2; +\infty[$.
3. Étudier le sens de variations de F sur $[-2; +\infty[$ puis valider la conjecture.

Exercice 3/36

Déterminer l'intégrale à l'aide d'une primitive dans chacun des cas suivants.

- | | | |
|------------------------------|----------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $\int_{-3}^5 2x + 8 dx$ | 4. $\int_{-1}^1 e^{-x} dx$ | 8. $\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ |
| 2. $\int_0^4 x^2 + x + 1 dx$ | 5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx$ | 9. $\int_3^7 \frac{2}{x^2} dx$ |
| 3. $\int_0^1 e^{2x} dx$ | 6. $\int_0^{\pi} \sin(x) dx$ | 10. $\int_1^2 \frac{x+1}{x^3} dx$ |
| | 7. $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ | |

Exercice 4/36

- Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 + 6x}{(x+3)^2}$.
 - Vérifier que la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par $F(x) = \frac{x^2}{x+3}$ est une primitive de f sur $[0; +\infty[$.
 - En déduire $\int_1^3 f(x) dx$.
- Soit g la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $g(x) = \frac{5 \ln(x)}{x} + 3$.
 - Vérifier que la fonction G définie sur $[1; +\infty[$ par $G(x) = \frac{5 \ln(x)^2}{x} + 3x$ est une primitive de G sur $[1; +\infty[$.
 - En déduire $\int_2^4 g(x) dx$.

Exercice 5/36

Déterminer l'intégrale à l'aide d'une primitive dans chacun des cas suivants.

- | | | |
|-----------------------------------------------|--------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| 1. $\int_1^3 x^3 + 4x^2 - 5x + 1 dx$ | 7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) - \sin(x) dx$ | 13. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx$ |
| 2. $\int_{-2}^2 (x+1)^2 dx$ | 8. $\int_1^2 \frac{x^2+3}{x} dx$ | 14. $\int_1^2 \frac{2}{(3-5x)^2} dx$ |
| 3. $\int_1^e \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx$ | 9. $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$ | 15. $\int_{-1}^1 (2x+1)(x^2+x)^2 dx$ |
| 4. $\int_4^9 x + \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ | 10. $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} dx$ | 16. $\int_1^e \frac{1}{x} \ln(x) dx$ |
| 5. $\int_0^{\ln(2)} 2x + e^x dx$ | 11. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+3} dx$ | |
| 6. $\int_{-1}^0 e^{3x+1} dx$ | 12. $\int_2^4 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$ | |

Exercice 6/36

- Soit f une fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x^2 + x}{x+1}$.
 - Démontrer que, pour tout $x \in] -1; +\infty[$, $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x+1}$.

(b) En déduire $\int_0^1 f(x) dx$.

2. Soit g une fonction définie sur $] - 2; +\infty[$ par $g(x) = \frac{3x^2 + 12x + 11}{(x + 2)^2}$

(a) Démontrer que, pour tout $x \in] - 2; +\infty[$, $g(x) = 3 - \frac{1}{(x + 2)^2}$.

(b) En déduire $\int_{-1}^4 g(x) dx$.

Exercice 7/36

Soit f et g deux fonctions continues sur \mathbb{R} telles que $\int_{-1}^3 f(x) dx = 2$ et $\int_{-1}^3 g(x) dx = -5$.

1. $\int_{-1}^3 7f(x) dx$
2. $\int_{-1}^3 f(x) + g(x) dx$
3. $\int_{-1}^3 2f(x) - 3g(x) dx$

Exercice 8/36

1. Soit f_1 la fonction définie sur \mathbb{R} par $f_1(x) = \frac{x}{1 + x^2}$ et g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g_1(x) = \frac{x^3}{1 + x^2}$.

(a) On pose $I_1 = \int_0^1 f_1(x) dx$. Déterminer I_1 .

(b) On pose $J_1 = \int_0^1 g_1(x) dx$. Déterminer $I_1 + J_1$ puis en déduire la valeur de J_1 .

2. Soit f_2 la fonction définie sur \mathbb{R} par $f_2(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ et g_2 la fonction définie sur \mathbb{R} par $g_2(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

(a) On pose $J_2 = \int_0^1 g_2(x) dx$. Déterminer J_2 .

(b) On pose $I_2 = \int_0^1 f_2(x) dx$. Déterminer $I_2 + J_2$ puis en déduire la valeur de I_2 .

Exercice 9/36

1. Soit f la fonction définie sur $[0; 5]$ par $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 6 & \text{si } 3 < x \leq 5 \end{cases}$ Déterminer

$$\int_0^5 f(x) dx.$$

2. Soit g la fonction définie sur $[-2; 1]$ par $g(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ 2 - x^2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$ Déterminer

$$\int_{-2}^1 g(x) dx.$$

Exercice 10/36

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - x - 2$.

- Déterminer le signe de f sur \mathbb{R} .
- En déduire le signe des intégrales suivantes (sans les calculer).

$$(a) \int_{-2}^{-1} f(x) dx \qquad (b) \int_{-1}^2 f(x) dx \qquad (c) \int_3^5 f(x) dx$$

Exercice 11/36

- Soit f une fonction continue sur $[-5; 7]$ telle que pour tout $x \in [-5; 7]$, $1 \leq f(x) \leq 3$.
Déterminer un encadrement de $\int_{-5}^7 f(x) dx$.
- Soit g une fonction continue sur $[-3; 2]$ telle que pour tout $x \in [-3; 2]$, $-2 \leq g(x) \leq 4$.
Déterminer un encadrement de $\int_{-3}^2 g(x) dx$.

Exercice 12/36

Soit f la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $f(t) = 2 - t$.

- Soit $x \in [1; +\infty[$.
Déterminer en fonction de x , $\int_1^x f(t) dt$.
- Démontrer que, pour tout $t \in [1; +\infty[$, $2 - t \leq \frac{1}{t}$.
- En déduire que, pour tout $x \in [1; +\infty[$, $-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} \leq \ln(x)$.

Exercice 13/36 : Intégration par parties

Déterminer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties.

$$\begin{array}{lll} 1. \int_{-2}^3 (x+1)e^x dx & 4. \int_1^e x \ln(x) dx & 7. \int_{-1}^1 2x(8x+2)^2 dx \\ 2. \int_0^1 xe^{2x} dx & 5. \int_0^\pi x \sin(x) dx & 8. \int_1^4 \sqrt{x} dx \\ 3. \int_1^e \ln(x) dx & 6. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(x) dx & \end{array}$$

Exercice 14/36

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

- Déterminer I_0 .
- Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
- En déduire I_1 , I_2 et I_3 .

Exercice 15/36

Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)e^x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)e^x dx$

- (a) Démontrer que $I = e^{\frac{\pi}{2}} - J$
(b) Démontrer que $J = 1 + I$.
- En déduire I et J .

Exercice 16/36

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x$. Représenter \mathcal{C}_f et calculer $\int_0^2 f(x) dx$.

Exercice 17/36

Calculer les intégrales $I = \int_1^3 (2x - 1) dx$ et $J = \int_{-1}^1 (-2t + 3) dt$.

Exercice 18/36

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par l'expression $f(x) = 2x + 1$.

Déterminer de façon explicite, pour tout réel $t \geq 0$, la fonction $F(t) = \int_0^t f(x) dx$.

Exercice 19/36

Soit f la fonction définie sur $I = [0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x^2 + 6x + 4}{(x + 1)^2}$.

- Vérifier que la fonction F définie sur I par $F(x) = \frac{3x^2 + 4x}{x + 1}$ est une primitive de f sur I .
- En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$.

Exercice 20/36

Calculer les intégrales :

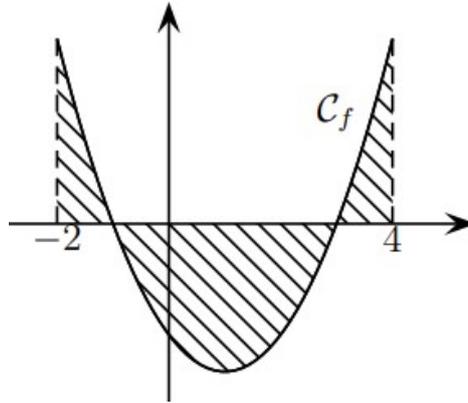
$$I = \int_0^2 2x dx, \quad J = \int_1^3 (2x - 1) dx, \quad K = \int_{-1}^1 (2t + 3) dt, \quad L = \int_0^2 x^2 dx, \quad M = \int_0^1 e^x dx,$$

$$N = \int_2^4 \frac{1}{x + 1} dx \quad \text{et} \quad P = \int_0^\pi \cos x dx.$$

Exercice 21/36

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 2x - 3$, et on note \mathcal{C}_f la courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Donner le tableau de signes de $f(x)$.
2. Calculer l'aire du domaine hachuré sur la figure ci-dessous.

**Exercice 22/36**

Soit la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 4$. Calculer l'intégrale $\int_0^2 f(x) dx$.

Représenter l'allure de la courbe représentative de f et interpréter graphiquement le résultat précédent.

Exercice 23/36

Calculer la valeur moyenne de chaque fonction sur l'intervalle donné :

1. $f(x) = x^2$ sur $[0; 1]$
2. $g(x) = (2 - x)(x - 1)$ sur $[-1; 0]$
3. $h(x) = e^x$ sur $[0; 1]$
4. $k(x) = e^{-3x+1}$ sur $[-1; 1]$
5. $l(x) = \frac{2}{3x+1}$ sur $[0; 3]$
6. $m(x) = \frac{5}{(2x+3)^2}$ sur $[0; 1]$

Exercice 24/36

Calculer $I = \int_1^2 (x^3 + \frac{2}{x}) dx$ et $J = \int_1^2 (\frac{3}{x^2} - \frac{2}{2x+1}) dx$

Exercice 25/36

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{2x}{2x^2 + 1}$.

Déterminer une expression de la fonction F définie par $F(t) = \int_0^t f(x) dx$.

Exercice 26/36

Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$.

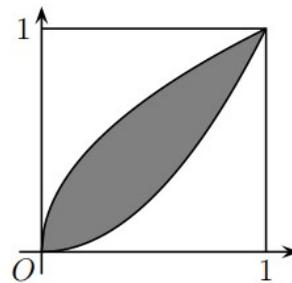
Déterminer le sens de variation de F .

Exercice 27/36

Dans un repère orthonormé, on considère le domaine \mathcal{D} compris entre les courbes d'équations $y = \sqrt{x}$ et $y = x^2$.

Déterminer l'aire du domaine \mathcal{D} .

(On pourra se rappeler que $\sqrt{x} = x^{1/2}$, donc de la forme x^n , afin de chercher une primitive)

**Exercice 28/36**

Calculer les intégrales :

$$1. I = \int_{-1}^1 (x^3 + x^2 + x) dx$$

$$2. I = \int_2^5 3 dx$$

$$3. I = \int_0^3 dx$$

$$4. I = \int_{-1}^1 2r^3 dr$$

$$5. I = \int_0^1 (2x + 1)^3 dx$$

$$6. I = \int_0^2 \frac{1}{(2x + 1)^2} dx$$

$$7. I = \int_0^1 \left(\frac{1}{(x + 3)^2} - \frac{1}{(2x + 3)^2} \right) dx$$

$$8. I = \int_1^2 \left(x + 1 + \frac{1}{x + 1} \right) dx$$

$$9. I = \int_1^3 \left(x - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) dx$$

$$10. I = \int_0^1 \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 3} dx$$

$$11. I = \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx$$

$$12. I = \int_{-1}^1 (2e^x + 1) dx$$

$$13. I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{2x} dx$$

$$14. I = \int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx$$

$$15. I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos x - \sin x) dx$$

$$16. I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(2x) dx$$

$$17. I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(3t + \frac{\pi}{6}\right) dx$$

$$18. I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

Exercice 29/36

Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4x - 2}{x^2 - 1}$.

1. Vérifier que, pour tout x de $]1; +\infty[$, on a $f(x) = \frac{3}{x + 1} + \frac{1}{x - 1}$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_2^4 \frac{4x - 2}{x^2 - 1}$.

Exercice 30/36

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par l'expression $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

Déterminer deux nombres réels a et b tels que, pour tout réel x , $f(x) = a + \frac{be^x}{1 + e^x}$.

En déduire $\int_0^2 f(x) dx$.

Exercice 31/36

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln x - x$.

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f .
2. En déduire l'intégrale $I = \int_1^e \ln x dx$.

Exercice 32/36

Montrer que la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto x \ln x$.

En déduire $\int_1^{\sqrt{e}} x \ln x dx$.

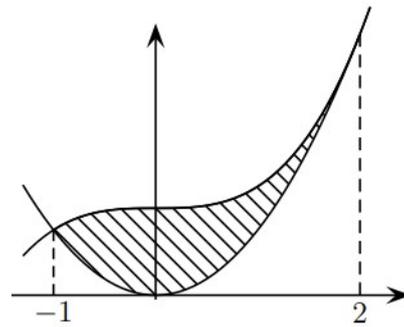
Exercice 33/36

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(t) = (2t + 1)e^{-t}$.

1. Vérifier que la fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(t) = (-2t - 3)e^{-t}$ est une primitive de f sur \mathbb{R} .
2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_0^1 f(t) dt$.
3. On définit la fonction G pour $x \geq 0$ par $G(x) = \int_0^x f(t) dt$.
 - (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - (b) Dresser le tableau de variation de la fonction f .
 - (c) Tracer dans un repère l'allure de la courbe représentative de la fonction f , et interpréter à l'aide de ce graphique la valeur $G(x)$ pour un nombre $x \geq 0$.
 - (d) Déterminer la limite de G en $+\infty$.

Exercice 34/36

Calculer l'aire du domaine, hachuré sur la figure ci-contre, délimité par les courbes représentatives des fonctions f et g définies par $f(x) = x^3 + 4$ et $g(x) = 3x^2$.

**Exercice 35/36**

Une chaînette est la courbe suivant laquelle se tend un fil homogène suspendu par ses extrémités à deux points fixes.

On admet que la chaînette est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4}$.

1. Calculer la fonction dérivée f' de f .
2. Étudier alors le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .
3. Tracer l'allure de la chaînette.

On admet que la longueur L de la chaînette (déformée et étirée sous l'action de son poids) est égale à l'intégrale $L = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + |f'(x)|^2} dx$.

1. En les calculant séparément, montrer que les deux expressions $1 + |f'(x)|^2$ et $|2f(x)|^2$ sont égales.
2. En déduire la longueur L de la chaînette.

Exercice 36/36

1. On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 1 - 2 \ln x$. On note \mathcal{C}_g sa courbe représentative.
 - (a) La courbe \mathcal{C}_g coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse α . Déterminer la valeur exacte du réel α .
 - (b) Calculer la fonction dérivée g' de g et dresser le tableau de variation de g .
 - (c) Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$ pour $x > 0$.
2. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2 \ln x + 1}{x}$.
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
4. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{f(x)}{x^2}$.
En déduire le sens de variation de f .
5. (a) Déterminer une primitive F de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
(Indication : on pourra écrire $f(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x + \frac{1}{x}$).
- (b) Soit $I = \int_1^5 f(x) dx$. Calculer I , et en donner une valeur approchée au centième.