

LES GRAPHES

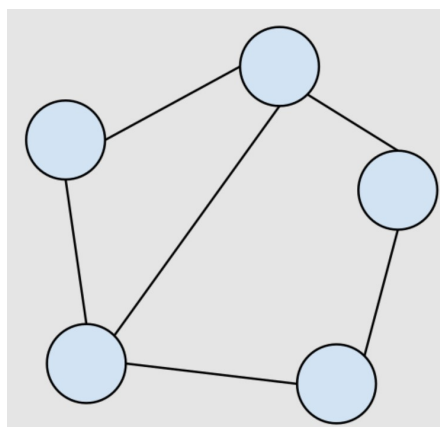
Andreï Markov (1856-1922) a suivi les cours de son compatriote Pafnouti Tchebychev à l'université de Saint-Petersbourg. Son doctorat obtenu, il y enseigne jusqu'en 1908, date à laquelle il en est exclu suite à son opposition au gouvernement du Tsar.

Après avoir travaillé sur la théorie des nombres, il s'intéresse aux probabilités. Il définit de manière précise la notion de processus aléatoire, et étudie ce que l'on nomme désormais une chaîne de Markov. On lui doit également la première démonstration rigoureuse du théorème centrale limite, résultat fondamental du calcul des probabilités.

I Généralités sur les graphes

On appelle graphe non orienté un ensemble fini et non vide de points, appelés sommets, reliés par des segments, appelées arêtes.

- L'ordre du graphe est le nombre de sommets.
- Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes partant de ce sommet.
- Deux sommets reliés par une arête sont adjacents.
- Une boucle est une arête dont les extrémités ont le même sommet.



Définition

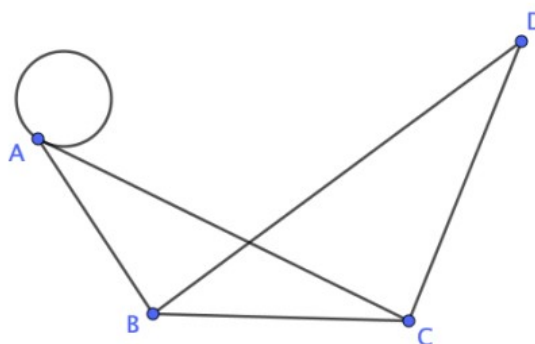
Exemple

Le graphe ci-contre possède 4 sommets; on dit qu'il est d'ordre 4.

Les sommets A et C sont adjacents car ils sont reliés par une arête.

Le sommet C est de degré 3 car 3 arêtes partent de C.

Le sommet A possède une boucle



- Un graphe est dit complet si deux sommets quelconques sont adjacents.
- S'il y a plusieurs arêtes entre deux sommets, on parle d'arêtes multiples.
- Un graphe est dit simple s'il ne possède ni boucle, ni arête multiple.

Définition

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale au double du nombre d'arêtes.

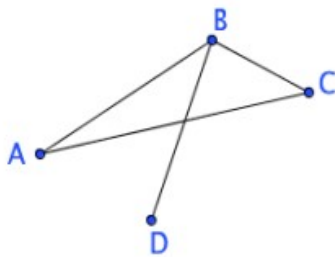
Exemple

- Un hectogone est un polygone à 100 côtés. Avec toutes ses diagonales, l'hectogone forme un graphe.
Combien la figure possède-t-elle de segments ?
- Cinq jeunes souhaitent organiser un tournoi de ping-pong où chaque joueur rencontre trois autres joueurs.
Est-ce possible ?

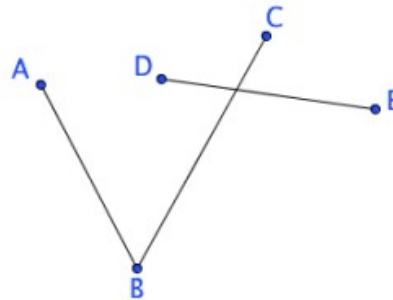
Dans un graphe non orienté, une chaîne est une succession d'arêtes mises bout à bout.

- La longueur de la chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent.
- On dit qu'une chaîne est fermée si ses extrémités coïncident.
- Un cycle est une chaîne fermée dont les arêtes sont toutes distinctes
- Un graphe est connexe si chaque couple de sommets est relié par une chaîne.

Exemple



Graphe connexe



Graphe non connexe, les sommets C et E, par exemple, ne peuvent être reliés.

- Un cycle peut comporter plusieurs fois le même sommet.
- Un graphe non orienté complet est connexe, mais la réciproque est fausse.

II Matrice d'adjacence associée à un graphe

Soit un graphe G non orienté d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n . La matrice d'adjacence associée à G est la matrice carrée de taille n dont chaque terme $a_{i,j}$ est égal au nombre d'arêtes reliant les sommets i et j .

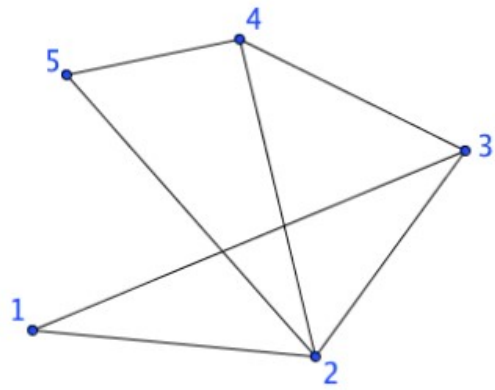
Exemple

La matrice d'adjacence associée au graphe ci-

$$\text{contre est : } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On constate que la diagonale est formée de 0 car aucun sommet n'est relié avec lui-même.

On constate également que la matrice est symétrique par rapport à la diagonale.



La matrice d'adjacence associée au graphe ci-

$$\text{contre est : } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$



Soit une matrice d'adjacence A d'un graphe G non orienté d'ordre p dont les sommets sont numérotés de 1 à p .

Le nombre de chaînes de longueur n reliant le sommet i au sommet j est égal au coefficient $a_{i,j}$ de la matrice A^n avec $n \in \mathbb{N}^*$

Propriété

On note $P(n)$ la proposition précédente et l'on démontre ce résultat par récurrence :

Initialisation :

Les chaînes de longueur 1 qui joignent le sommet i au sommet j correspondent directement au coefficient $a_{i,j}$ de la matrice d'adjacence $A = A^1$.

Hérédité :

Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang n et montrons que cela implique $P(n+1)$ vrai. Soit un troisième sommet l quelconque.

Le nombre de chaînes de longueur $k+1$ allant de i à j , tels que la première arête soit $\{i, l\}$ correspond au nombre de chaînes de longueur 1 allant de i à l multiplié par le nombre de chaînes de longueur k allant de l à j .

Ainsi, le nombre de chaînes de longueur $k+1$ qui joignent le sommet i à j est égal à la somme des termes pour tous les sommets l , soit le coefficient $a_{i,j}$ de la matrice A^{k+1} .

Conclusion :

$P(n)$ vraie $\implies P(n+1)$ vraie. La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 1$.

D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n > 0$.

La propriété est ainsi démontrée.

Démonstration

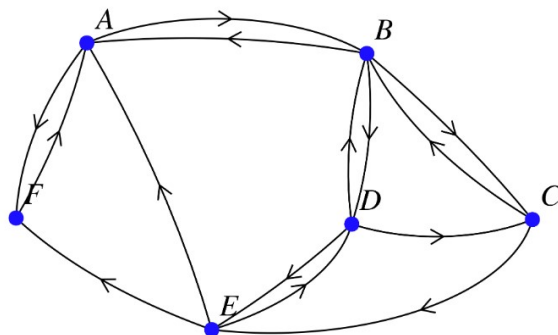
III Graphes orientés et graphes pondérés

Un graphe est orienté si ses arêtes, appelées arcs dans ce cas, ont un sens de parcours.

- Un chemin est une succession d'arcs mis bout à bout.
- Un circuit est un chemin fermé dont les arcs sont tous distincts.

Définition

Exemple



Définition

Un graphe est étiqueté si ses arêtes (ou ses arcs) sont affectées d'étiquettes (mots, lettres, symboles, nombres, ...)

- Dans le cas où les étiquettes sont des nombres, le graphe est dit pondéré. Les étiquettes sont appelées les poids entre les sommets.
- Le poids d'une chaîne (respectivement d'un chemin) est la somme des poids des arêtes (respectivement des arcs) constituant la chaîne (respectivement le chemin).
- Le chemin le plus court entre deux sommets est le chemin qui a le poids minimum.

Définition

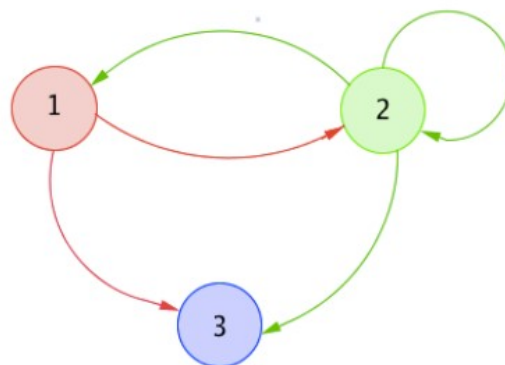
Soit un graphe G orienté d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n .

La matrice d'adjacence associée à G est la matrice carrée de taille n dont chaque terme $a_{i,j}$ est égal au nombre d'arcs orientés reliant le sommet i vers le sommet j .

Exemple

La matrice d'adjacence associée au graphe ci-

contre est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

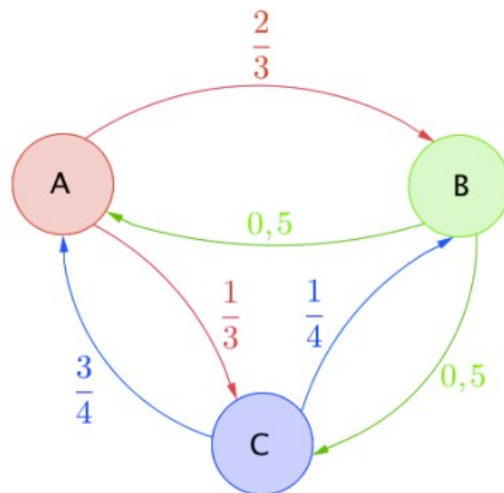


IV Chaîne de Markov

Définition

Un graphe probabiliste est un graphe orienté et pondéré possédant au plus un arc entre deux sommets et dont la somme des poids des arcs issus d'un même sommet est égale à 1.

Exemple



La matrice de transition d'une chaîne de Markov est la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient $a_{i,j}$ situé sur la ligne i et la colonne j est la probabilité de transition portée par l'arc reliant le sommet i vers le sommet j s'il existe et 0 dans le cas contraire.

Définition

Exemple

Dans l'exemple ci-dessus, la matrice de transition associée est $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$

- La somme des coefficients d'une même ligne d'une matrice de transition est égale à 1.

Une matrice est dite **stochastique** si ses coefficients sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1.

Définition

IV.1 Marche aléatoire

On considère la variable aléatoire X_n prenant les valeurs A , B ou C à l'étape n .

A , B ou C s'appelle les états de X_n .

La suite de variables aléatoires (X_n) est appelée marche aléatoire ou chaîne de Markov sur l'ensemble des issues $\{A, B, C\}$.

Dans une chaîne de Markov, l'état du processus à l'étape $n + 1$ ne dépend que de celui à l'état n , mais non de ses états antérieurs.

IV.2 Probabilité de transition

On considère la loi de probabilité de X_n , appelée probabilité de transition.

On note par exemple $P_{X_n=A}(X_{n+1} = C) = \frac{1}{3}$ Il s'agit d'une probabilité conditionnelle

L'état probabiliste après n étapes de la chaîne de Markov est la matrice ligne dont les coefficients sont les probabilités d'arrivée en chaque sommet après n étapes.

Exemple

Dans l'exemple précédent, la matrice ligne des états après la 3e étape donnerait les probabilités d'être en A, en B ou en C après 3 étapes.

On note p_n , q_n et r_n les probabilités d'être respectivement en A, B ou C après la n ième étape. A l'aide de la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{cases} p_{n+1} = 0.5q_n + \frac{3}{4}r_n \\ q_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{4}r_n \\ r_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + 0.5q_n \end{cases}$$

On note $\pi_n = (p_n \quad q_n \quad r_n)$ la matrice ligne des états de la chaîne de Markov après n étapes. On a alors $\pi_{n+1} = \pi_n \times p$.

On considère une chaîne de Markov de matrice de transition P et dont la matrice ligne des états à l'étape n est π_n .

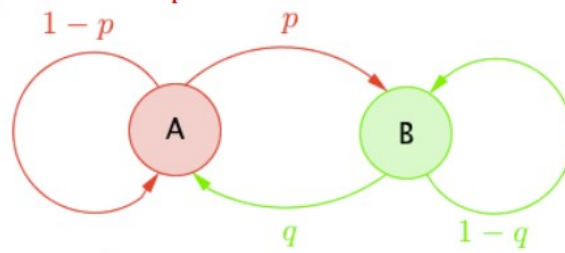
Pour tout entier naturel n , on a : $\pi_{n+1} = \pi_n \times p$ et $\pi_n = \pi_0 \times p^n$ où π_0 , est l'état initial.

V Distribution invariante d'une chaîne de Markov

On dit qu'une chaîne de Markov de matrice de transition P est convergente si la suite des matrices lignes (π_n) des états de la chaîne de Markov converge.

Si la suite (π_n) des états d'une chaîne de Markov convergente vérifie $\pi_{n+1} = \pi_n \times P$ alors la limite π de cette suite définit un état stable solution de l'équation $\pi = \pi P$.

On considère une chaîne de Markov de matrice transition P sur un graphe à deux sommets où $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$.



Alors on a $P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$. Et la suite des matrices lignes (π_n) des états de la chaîne de Markov converge vers un état stable π tel que $\pi = \pi P$.
 π ne dépend pas de l'état initial π_0 .