

FONCTIONS COMPOSÉES

I Composition de deux fonctions

On appelle fonction composée de u par v la fonction notée $v \circ u$ définie par :

$$v \circ u = v(u(x))$$

Définition

Exemple

On considère la fonction f définie sur $[-3; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+3}$.

La fonction f est composée de deux fonctions : $u(x) = x+3$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

On a bien $f(x) = v \circ u(x) = \sqrt{u(x)} = \sqrt{x+3}$

Exemple

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Donner le domaine de définition de la fonction ainsi que la composition dont elle est issue.

Exemple

Soient les fonctions définies respectivement sur \mathbb{R} et $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $u(x) = x^2 + x$ et $v(x) = \frac{x}{x+1}$.

Exprimer $u \circ v$ et $v \circ u$ en fonction de x .

II Dérivation d'une fonction composée.

II.1 Dérivées usuelles à connaître.

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I :

Fonction	dérivée
u^n	$nu'u^{n-1}$
e^u	$u'e^u$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$

Exemple

Déterminer le domaine de dérivation ainsi que la dérivée des fonctions suivantes :

- a. $f(x) = (4x^2 - x + 3)^5$ c. $f(x) = \ln(3x - x^2)$ e. $f(x) = -6 \sin(x^2 + 5)$
b. $f(x) = 3e^{\frac{2}{x}}$ d. $f(x) = 2 \cos(3x - 2)$ f. $f(x) = 2 \ln\left(\frac{x+1}{x^2+2}\right)$

II.2 Cas général :

Remarque

La formule générale pour dériver une fonction composée est la suivante :

$$(u(v(x)))' = v'(x) \times u'(v(x))$$

ou

$$(u \circ v)' = v' \times u' \circ v$$

Exemple

Dériver les fonctions suivantes après avoir donné leurs domaines de dérivation.

- a. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ b. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}$

III Primitive d'une fonction composée

III.1 Primitives usuelles à connaître.

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I , et F la primitive de la fonction f définie sur et dérivable sur I :

Fonction	Primitive
$f(ax + b)$	$\frac{1}{a}F(ax + b)$
$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$u'e^u$	e^u
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$

Exemple

Donner le domaine de définition et une primitive des fonctions suivantes :

- a. $f(x) = (4x - 2)(2x^2 - 2x + 3)^2$ c. $f(x) = \cos(3x) - 2 \sin(5x - 1)$
b. $f(x) = xe^{x^2}$ d. $f(x) = \frac{6x - 3}{x^2 - x}$