LOI DES GRANDS NOMBRES

Exprimer sans valeur absolue

Exprimer sans valeur absolue : $|X-3| \geq 2$ et $|X-4| \leq 2$

$X \geq 5$ ou $X \leq 1$ et $2 \leq X \leq 6$

Utiliser l'inégalité de Bienaymé Tchebychev

Soit X une variable aléatoire d'espérance 10 et de variance 2.
A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, estimer la probabilité d'avoir $|X-10| \geq 2$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $P(|X-10| \geq 2) \leq \dfrac{2}{2^2} = 0,5$

Utiliser l'inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

On suppose que le nombre de pièces sortant d'une usine donnée chaque semaine est une variable aléatoire d'espérance 50 et de variance 10.

a. A l'aide de l'inégalité de Markov estimer la probabilité cumulée que la production dépasse 90 pièces.

b. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev estimer la probabilité que la production de la semaine prochaine soit comprise entre 40 et 60 pièces.

a. D'après l'inégalité de Markov, $P(X \geq 90) \leq \dfrac{50}{90} \approx 0,5556$ soit inférieur à environ $55,56\%$

b. Nous avons $|40-50| = |60-50| = 10$.
D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(|X-50| \geq 10) \leq \dfrac{10}{10^2}$ donc $1 - P(|X-50| \leq 10) \leq 0,1$
Finalement $P(|X-50| \leq 10) \geq 0,9$

Utiliser la loi des grands nombres

Justifier qu'en lançant une pièce de monnaie un très grand nombre de fois, on peut estimer la probabilité qu'elle retombe sur le côté « Pile ».

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer une pièce et à regarder si elle retombe sur le côté « Pile » (succès de probabilité p inconnue), ou sur le côté « Face ».
Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p. On répète cette expérience n fois de manière indépendante, on a alors un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
Notons X_1, X_2, ..., X_n les variables aléatoires associées à chaque répétition, prenant la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.
Toutes les variables suivent un schéma de Bernoulli de paramètre p.
Les variables ont toutes la même espérance $E(X_1) = E(X_2) = ... = E(X_n) = p$.
On pose $S_n = X_1 + ... + X_n$ et $M_n = \dfrac{S_n}{n}$.
On peut appliquer la loi des grands nombres :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{n \to +\infty} P(|M_n - p| \geq 0) = 0$$

En lançant un très grand nombre de fois une pièce de monnaie, on peut estimer la valeur de p en observant la réalisation de la variable aléatoire M_n.