Corrigé : Exercices

Inéquations

Exercice 1/4 : Inéquations

Résoudre les inéquations suivantes en précisant le domaine d'étude :

1. $3x + 1 > 0$.
2. $3x - (5x + 7) \geq 2x - 3$.
3. $4x + 3 \leq -\dfrac{x+1}{x}$
4. $\dfrac{2x-5}{3} < \dfrac{2x-3}{7}$.

Solution :

1. Domaine de définition : $\mathbb{R}$
   $x > -\dfrac{1}{3}$ donc $S =]-\dfrac{1}{3}; +\infty[$
2. Domaine de définition : $\mathbb{R}$
   $x \leq -1$ donc $S =]-\infty; -1]$
3. Domaine de définition : $\mathbb{R}\backslash\{0\}$
   $S = [-\infty; 0[$
4. Domaine de définition : $\mathbb{R}$
   $x < \dfrac{13}{4}$ donc $S =]-\infty; \dfrac{13}{4}[$

Exercice 2/4 : Résolution d'une équation produit

1. Résoudre l'inéquation suivante : $(4-x)(3+x) \leq 0$ en s'aidant si nécessaire d'un tableau de signes.
2. Résoudre l'inéquation suivante : $(1-3x)(3+2x)x \leq 0$ en s'aidant si nécessaire d'un tableau de signes.

Solution :

1. On construit le tableau de signes de $(4-x)(3+x)$:
   - $4 - x = 0 \iff x = 4$ et $m = -1$
   - $3 + x = 0 \iff x = -3$ et $m = 1$

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$4-x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$3+x$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$(4-x)(3+x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   On « lit » la solution sur la dernière ligne du tableau, lorsque l'expression est négative ou nulle :
   $\boxed{S =]\ -\infty\ ;\ -3\ ]\ \cup\ [\ 4\ ; -\infty\ [}$

2. On construit le tableau de signes de $(1-3x)(3+2x)x$:
   - $1 - 3x = 0 \iff x = \dfrac{1}{3}$ et $m = -3$
   - $3 + 2x = 0 \iff x = -\dfrac{3}{2}$ et $m = 2$
   - $x = 0$ et $m = 1$

x	$-\infty$		$-1,5$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$1-3x$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$3+2x$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
x		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$(1-3x)(3+2x)x$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

On « lit » la solution sur la dernière ligne du tableau, lorsque l'expression est négative ou nulle :

$$\boxed{\mathcal{S} = \ [\ -1,5\ ;\ 0\ ]\ \cup\ [\ \frac{1}{3}\ ;+\infty\ [}$$

Exercice 3/4 : résolution d'une inéquation quotient

1. Donner le domaine de définition de la fonction définie par
   $f(x) = \dfrac{(-2x+4)(x-1)}{(6+2x)(5-x)}$.
2. Construire le tableau de signes f.
3. En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$ sur I.

Solution :

1. f est définie pour $x \neq -3$ et $x \neq 5$.
   D'où $D_f =]-\infty; -3[\cup]-3; 5[\cup]5; +\infty[$
2. Tableau de signes de la fonction f :
   - $-2x+4 = 0 \iff x = 2$ et $m = -2$.
   - $x-1 = 0 \iff x = 1$ et $m = 1$.
   - $6+2x = 0 \iff x = -3$ (valeur interdite) et $m = 2$.
   - $5-x = 0 \iff x = 5$ (valeur interdite) et $m = -1$.

x	$-\infty$		-3		1		2		5		$+\infty$
$-2x+4$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
$x-1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$6+2x$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$5-x$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

3. On recherche les signes positifs dans la dernière ligne du tableau et on trouve :
   $\boxed{\mathcal{S} =]\ -\infty\ ;\ -3\ [\ \cup\ [\ 1\ ;\ 2\ ]\ \cup\ ]\ 5\ ;\ +\infty\ [}$

Exercice 4/4 : Problème final

Soit f définie par $f(x) = x-3+3(x-3)^2+x^2-9$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Développer, réduire et ordonner $f(x)$.
3. Montrer que l'on peut factoriser la fonction f sous la forme : $f(x) = (x-3)(4x-5)$.
4. Déterminer, en utilisant la forme de $f(x)$ qui convient le mieux :
   (a) Les valeurs de $f(0)$ et $f\left(\dfrac{5}{4}\right)$,
   (b) Les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$,

(c) Les solutions de l'équation $f(x) = 15$,

(d) Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$.

5. Construire la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ puis vérifier graphiquement les résultats obtenus dans la question 3. en laissant apparents les traits de construction.

Solution :

1. $D_f = \mathbb{R}$
2. $f(x) = 4x^2 - 17x + 15$
3. Développer l'expression pour retomber sur $f(x)$.
4. (a) $f(0) = 15$ et $f(\frac{5}{4}) = 0$

   (b) Pour $x = \frac{5}{4}$ et $x = 3$

   (c) Pour $x = 0$ ou $x = \frac{17}{4}$.

   (d)

x	$-\infty$		$\frac{5}{4}$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$4x-5$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   $S =]-\infty; \frac{5}{4}] \cup [3; +\infty[$

5. Voir GéoGébra.