Version 250213

2024/2025

Fonctions sinus et cosinus

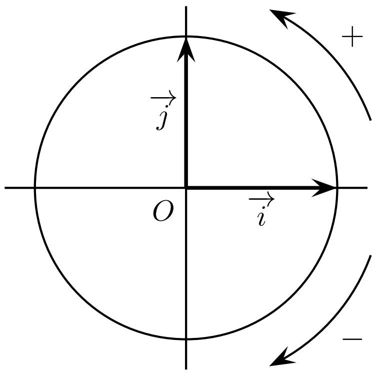
L'astronome grec **Hipparque** qui vivait au deuxième siècle avant J.-C. est considéré comme le fondateur de la trigonométrie. Il emprunte aux Babyloniens l'habitude de partager le cercle en 360 parties, usage qui survit encore de nos jours. Il effectue de nombreux calculs de cordes en fonction de l'angle correspondant ce qui revient à faire une table des sinus.

I Cercle trigonométrique : mesure des angles orientés.

Définition

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1 sur lequel on a choisit :

- un **sens direct**, ou sens positif, sens inverse des aiguilles d'une montre
- un **sens indirect**, ou sens négatif, sens des aiguilles d'une montre.



Sur le cercle trigonométrique, la mesure en radians d'un angle orienté est égale à la mesure algébrique (avec un signe) de l'arc intercepté

Exemple

Un tour complet, soit 360°, mesure 2π radians.
$\dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ radians (1/4 de tour).
On parle d'**une** mesure de l'angle orienté car il en possède une infinité :
L'angle orienté $(\vec{i}\,;\vec{j})$ mesure $-\dfrac{\pi}{2}$ radians. $\dfrac{\pi}{2}$ radians, $\dfrac{\pi}{2}+2\pi=\dfrac{5\pi}{2}$ rad, $\dfrac{5\pi}{2}+2\pi=\dfrac{9\pi}{2}$ rad,...,
$\dfrac{\pi}{2}-2\pi=-\dfrac{3\pi}{2}$ rad,...

Exemple

Compléter :

Degrés	0	30	45	60	90	135	180	360
Radians	0							

Degrés	1		-15	20	270		
Radians		1				$\dfrac{167\pi}{4}$	$\dfrac{7\pi}{3}$

Définition

La **mesure principale** d'un angle orienté est la mesure de cet angle appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

Exemple

L'angle orienté $(\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{i}\,)$ a plusieurs mesures : $\dfrac{3\pi}{2}$; $-\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{3\pi}{2}+2\pi$...

Sa mesure principale est $-\dfrac{\pi}{2}$

Exemple

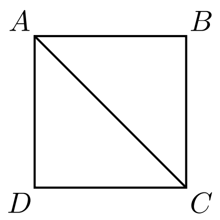
Déterminer la mesure principale des angles orienté suivants :

a. $\dfrac{7\pi}{3}$ b. $-\dfrac{11\pi}{6}$ c. $\dfrac{9\pi}{8}$ d. $\dfrac{15\pi}{2}$ e. $\dfrac{26\pi}{4}$ f. $-\dfrac{13\pi}{5}$

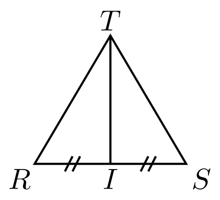
II Sinus et cosinus d'un nombre réel

Exemple

a. $ABCD$ est un carré de côté 1.
Calculer la longueur AC, puis en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

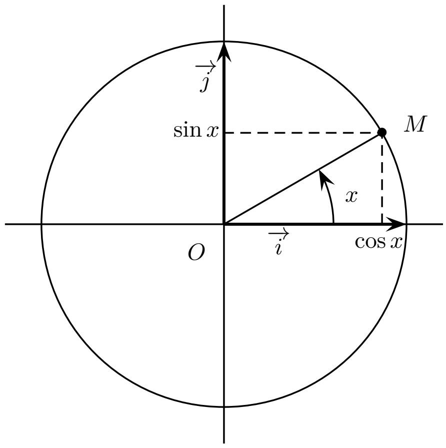


b. RST est un triangle équilatéral de côté 1.
Calculer la longueur TI, en déduire les valeurs exactes de $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.



Soit M un point du cercle trigonométrique, et x une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{i};\overrightarrow{OM})$.

- Le **cosinus** de x, noté $\cos(x)$, est l'abscisse de M
- Le **sinus** de x, noté $\sin(x)$, est l'ordonnée de M

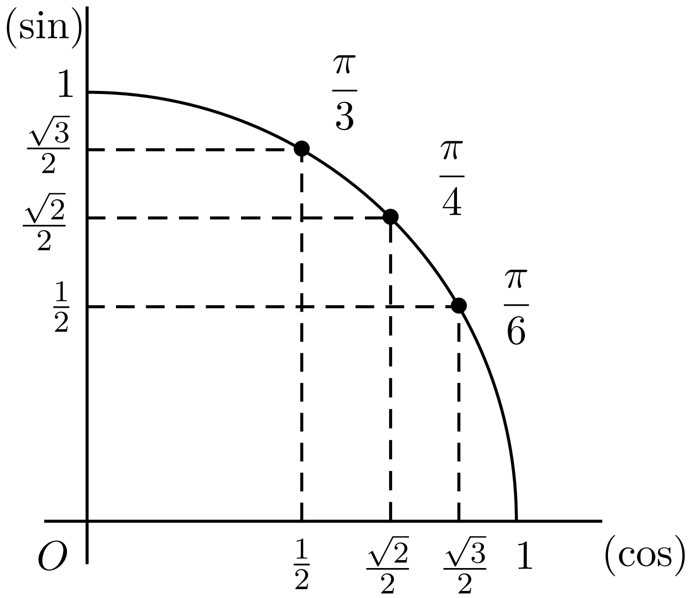


Définition

Exemple

Angles remarquables :

x	$0°/0rad$	$30°$ / $\frac{\pi}{6}rad$	$45°$ / $\frac{\pi}{4}rad$	$60°$ / $\frac{\pi}{3}rad$	$90°$ / $\frac{\pi}{2}rad$
$\sin x$	0	$\frac{\mathbf{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{2}$	$\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{2}$	$\frac{\mathbf{1}}{2}$	0



Ces valeurs particulières sont à connaître dans hésiter !

Propriété

Pour tout réel x :

- $-1 \leq \cos(x) \leq 1$
- $-1 \leq \sin(x) \leq 1$
- $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$
- $\cos(-x) = \cos(x)$ **(fonction paire)**
- $\sin(-x) = -\sin(x)$ **(fonction impaire)**
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exemple

Déterminer les valeurs exactes de :

a. $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ b. $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ c. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ d. $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ e. $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

III Cosinus et sinus d'angles associés

Propriété

- Deux angles sont dits **associés** s'ils admettent des cosinus et des sinus égaux ou opposés.
- Pour tout nombre réel x on a :
  - $\cos(-x) = \cos(x)$
  - $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$
  - $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
  - $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
  - $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
  - $\sin(-x) = -\sin(x)$
  - $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$
  - $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
  - $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
  - $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

Exemple

Simplifier les expressions :

a. $A = \cos(\frac{\pi}{2} - x) + \sin(-x) + \cos(-x)$

b. $B = \sin(\pi - x) + \cos(\pi + x) + \sin(x + \pi)$

c. $C = \sin(\frac{\pi}{2} - x) + \cos(\pi - x) + \sin(-x)$

d. $D = \cos(x + \pi) + \sin(\pi - x) + \cos(x + 2\pi)$

Propriété

Formules d'additions : Soit a et b deux nombres réels quelconques. On a :

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

Exercices :

Exercice 1 :

À l'aide des formules d'addition, montrer que :

a. $2\cos(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}\cos(\frac{2}{3}x) + \sin(\frac{2}{3}x)$

b. $\sin(x + \frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$

c. $4\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}\sin(2x) - 2\sqrt{2}\cos(2x)$

Exercice 2 :

En utilisant les formules d'addition, donner les valeurs exactes des cosinus et sinus de :

a. $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

b. $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$

c. $\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}$.

Formules de duplication : pour tout réel a on a,

- $\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=1-2\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1$
- $\sin(2a)=2\sin a\cos a$

Propriété

Démontrer la propriété précédente..

IV Équations trigonométriques

- Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos(x)=\cos(a)$ sont : $\begin{cases} x &= a+2k\pi \\ x &= -a+2k\pi \end{cases}$ où k est un entier relatif quelconque.
- Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin(x)=\sin(a)$ sont : $\begin{cases} x &= a+2k\pi \\ x &= \pi-a+2k\pi \end{cases}$ où k est un entier relatif quelconque.

Propriété

Exemple

Résoudre les équations sur $\mathbb{R}$:

a. $\cos x=\cos(\dfrac{\pi}{6})$

b. $\sin x=\sin(\dfrac{2\pi}{3})$

c. $\cos t=\cos(\dfrac{5\pi}{6})$

d. $\sin t=\sin(\dfrac{\pi}{8})$

e. $\cos x=0$

f. $\cos x=\dfrac{1}{2}$

g. $\sin t=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

h. $\cos x=\cos(x+\dfrac{\pi}{4})$

i. $\cos x=\sin(\dfrac{\pi}{3})$

j. $\cos x=\sin(\dfrac{\pi}{12})$

k. $\sin x=\cos x$

l. $\cos(2x)=\sin(\dfrac{x}{2})$

Exemple

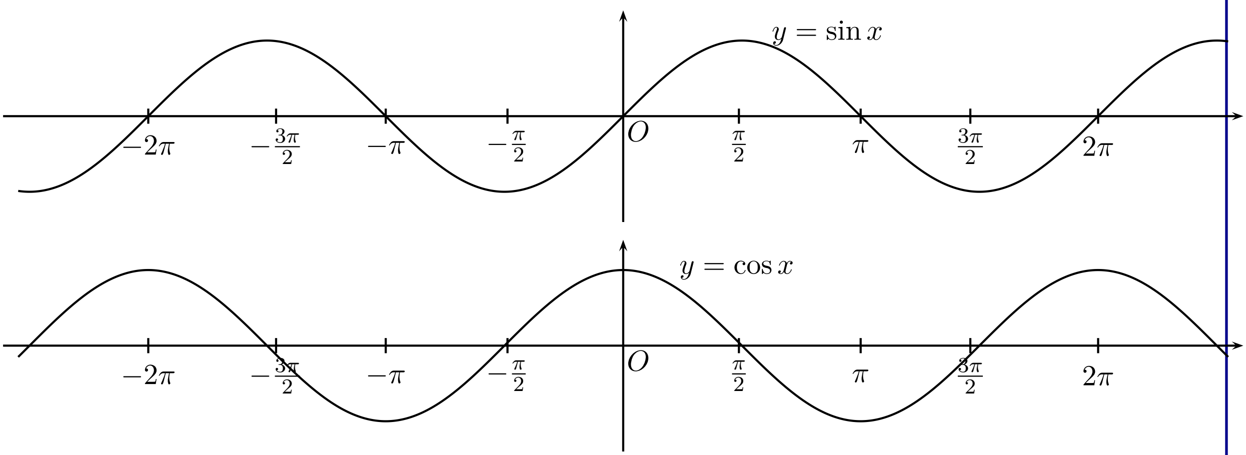
Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquationn suivante :

$$\sin(x)\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

V Fonction sinus et cosinus

Propriété

- Pour tout réel x, $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$.
  Les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont **périodiques** de période 2π.
  Les courbes représentatives des fonctions sinus (sinusoïde) et cosinus (cosinusoïde) sont inchangées par translation de vecteur $2\pi\,\overrightarrow{i}$
- Pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$
  La fonction cosinus est **paire**, sa courbe représentative admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
- Pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$
  La fonction sinus est **impaire**, sa courbe représentative admet l'origine du repère comme centre de symétrie.



Exemple

L'évolution de la population P d'animaux dans une forêt est modélisée par :

$$P(t) = 500 + 50\sin(2\pi t - \frac{\pi}{2}),$$

où t est exprimé en années.

a. Calculer $P(0)$; $P(\frac{1}{2})$ et $P(1)$.
b. Quelle est la période de la fonction P ?
c. Pour quelle valeur de t, la population est-elle à son maximum la première année ? Quelle est la population maximum ?

VI Fonctions sinusoïdales : $t \mapsto A\cos(\omega t + \phi)$ et $t \mapsto A\sin(\omega t + \phi)$.

Remarque

En physique, de nombreux phénomènes sont liés à la propagation d'onde : le son, la lumière, ...
Les grandeurs associées à ces ondes peuvent être mathématisées par des fonctions sinusoïdales du type : $t \mapsto A\cos(\omega t + \phi)$ et $t \mapsto A\sin(\omega t + \phi)$.

Définition

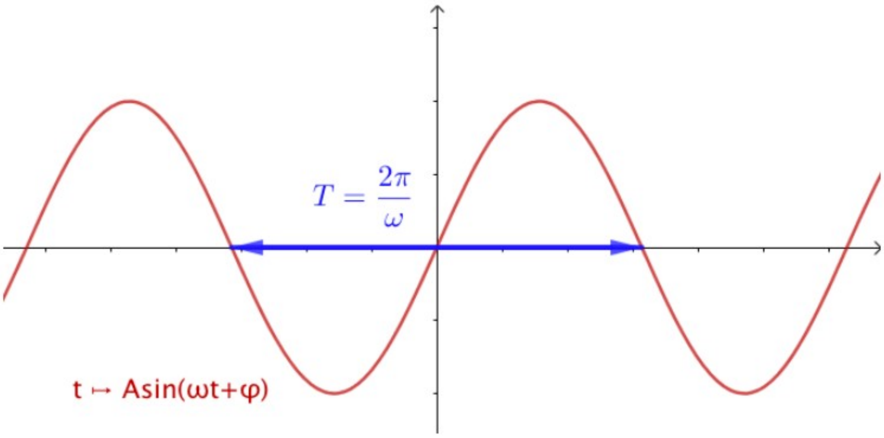
- **L'amplitude** d'une fonction périodique est sa valeur maximale.
- $\omega t + \phi$ est appelé la **phase instantanée** du signal.
  Si $t = 0$, ϕ est appelé la **phase à l'origine** du signal.
  ω est appelé **la pulsation** du signal.
- **La période** d'une fonction est l'intervalle pour lequel la courbe de la fonction se reproduit à l'identique.

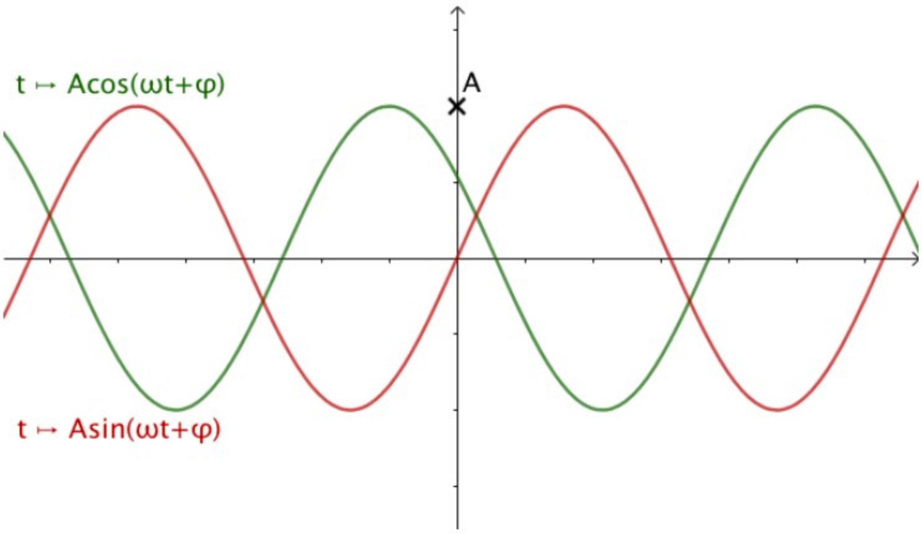
Propriété

- L'amplitude des fonctions $t \mapsto A\cos(\omega t + \phi)$ et $t \mapsto A\sin(\omega t + \phi)$ est A.
- La période des fonctions $t \mapsto A\cos(\omega t + \phi)$ et $t \mapsto A\sin(\omega t + \phi)$ est $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Remarque

- En physique, la phase s'exprime en radians et la pulsation en radians par seconde.
- En physique, la période s'exprime en secondes.





Exemple

Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) - \sin(2x)$ est impaire.

VII Étude des variations d'une fonction trigonométrique

Soit ω et ϕ deux réels quelconques.

Fonction	Dérivée
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(\omega x + \phi)$	$-\omega \sin(\omega x + \phi)$
$\sin(\omega x + \phi)$	$\omega \cos(\omega x + \phi)$

Théorème

Limites des taux d'accroissement en 0 : conséquence de la dérivabilité en 0.

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x} = 0$

Exemple

Démontrer le théorème ci-dessus en utilisant la définition par le taux d'accroissement de la dérivabilité d'une fonction en un point.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) - \dfrac{1}{2}$

a. Étudier la parité de f.

b. Démontrer que la fonction f est périodique de période π.

c. Étudier les variations de f sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

d. Représenter graphiquement la fonction f sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ et prolonger de part et d'autre la représentation par symétrie et par translation.