Version 241003

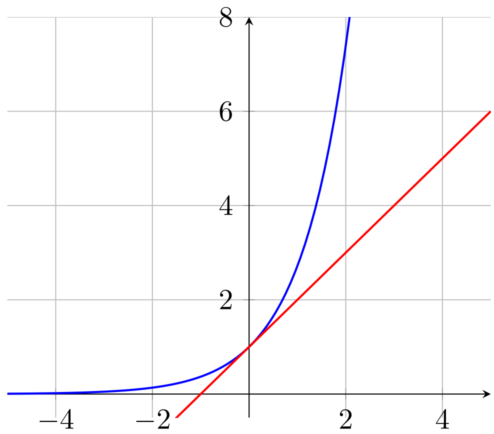
2024/2025

EXPONENTIELLE DE BASE E

I Définition de la fonction exponentielle de base e

Propriété

Parmi toutes les fonctions $x \longmapsto a^x$ il en existe une seule dont la tangente à la courbe représentative au point $(0;1)$ a pour coefficient directeur 1.



Définition

Cette fonction est la fonction exponentielle de base e, noté exp, telle que pour tout réel x, on a $\exp : x \longmapsto e^x$

Le réel $e = e^1$ est environ égal à 2,718.

Remarque

On verra que la fonction exponentielle est croissante. Mais sa croissance est très rapide, ainsi e^7 dépasse 1000, e^{14} dépasse le million et e^{21} dépasse le milliard.

Valeurs particulières à connaître :

$e^0 = 1$ et $e^1 = e$.

II Étude de la fonction exponentielle

Propriété

Dérivabilité :

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^x)' = e^x$

Limites :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Variations :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple

Dériver les fonctions suivantes :

a. $f(x) = 4x - 3e^x$ b. $g(x) = (x-1)e^x$ c. $h(x) = \dfrac{e^x}{x}$

Propriété

Pour tous réels x et y on a :

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $(e^x)^n = e^{nx}$ avec $n \in \mathbb{N}$

Exemple

Simplifier les écritures suivantes :

- $A = \dfrac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}}$
- $C = \dfrac{1}{(e^{-3})^2} + \dfrac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}}$
- $B = (e^5)^{-6} \times e^{-3}$
- $D = \dfrac{(e^{2x})^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}}$

Propriété

Pour tous réels a et b, on a :

- $e^a = e^b \iff a = b$
- $e^a < e^b \iff a < b$

Exemple

Résoudre une équation ou une inéquation :

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x^2} = 0$

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{4x-1} \geq 1$

Exemple

Étudier une fonction exponentielle :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^x$.

a. Calculer la dérivée de la fonction f.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

c. Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0

d. Tracer la courbe représentative de la fonction f en s'aidant de la calculatrice.

III Fonctions de la forme $x \longmapsto e^{kx}$

III.1 Variations

Propriété

La fonction $x \longmapsto e^{kx}$, avec $k \in \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est la fonction $x \longmapsto ke^{kx}$.

- Si $k > 0$: la fonction $x \longmapsto e^{kx}$ est croissante.
- Si $k < 0$: la fonction $x \longmapsto e^{kx}$ est décroissante.

Il vous faudra démontrer les propriétés ci-dessus.

Exemple

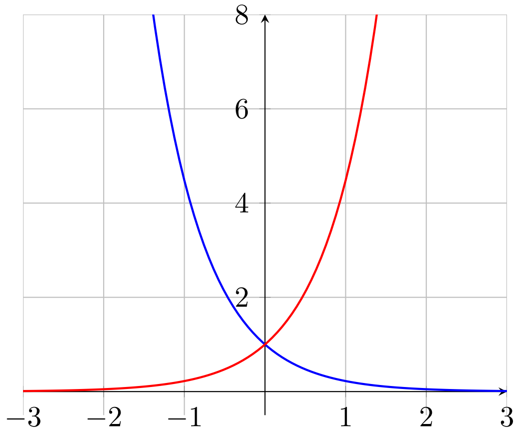
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-3x}$.

a. Calculer la dérivée de la fonction f.

b. En déduire les variations de la fonction f.

III.2 Limites

- Si $k > 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{kx} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{kx} = 0$
- Si $k < 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{kx} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{kx} = +\infty$



Propriété

Exemple

Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0; 10]$ et telle que $f'(t) = 0.14f(t)$.

a. Montrer que la fonction f définie sur $[0; 10]$ par $f(t) = Ae^{0.14t}$ convient.

b. On suppose que $f(0) = 50000$. Déterminer A.

c. Déterminer les variations de f sur $[0; 10]$

d. (a) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.

(b) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a-t-il doublé. Arrondir à l'heure près.

IV Croissances comparées des fonctions exponentielles et puissances

Croissances comparées :

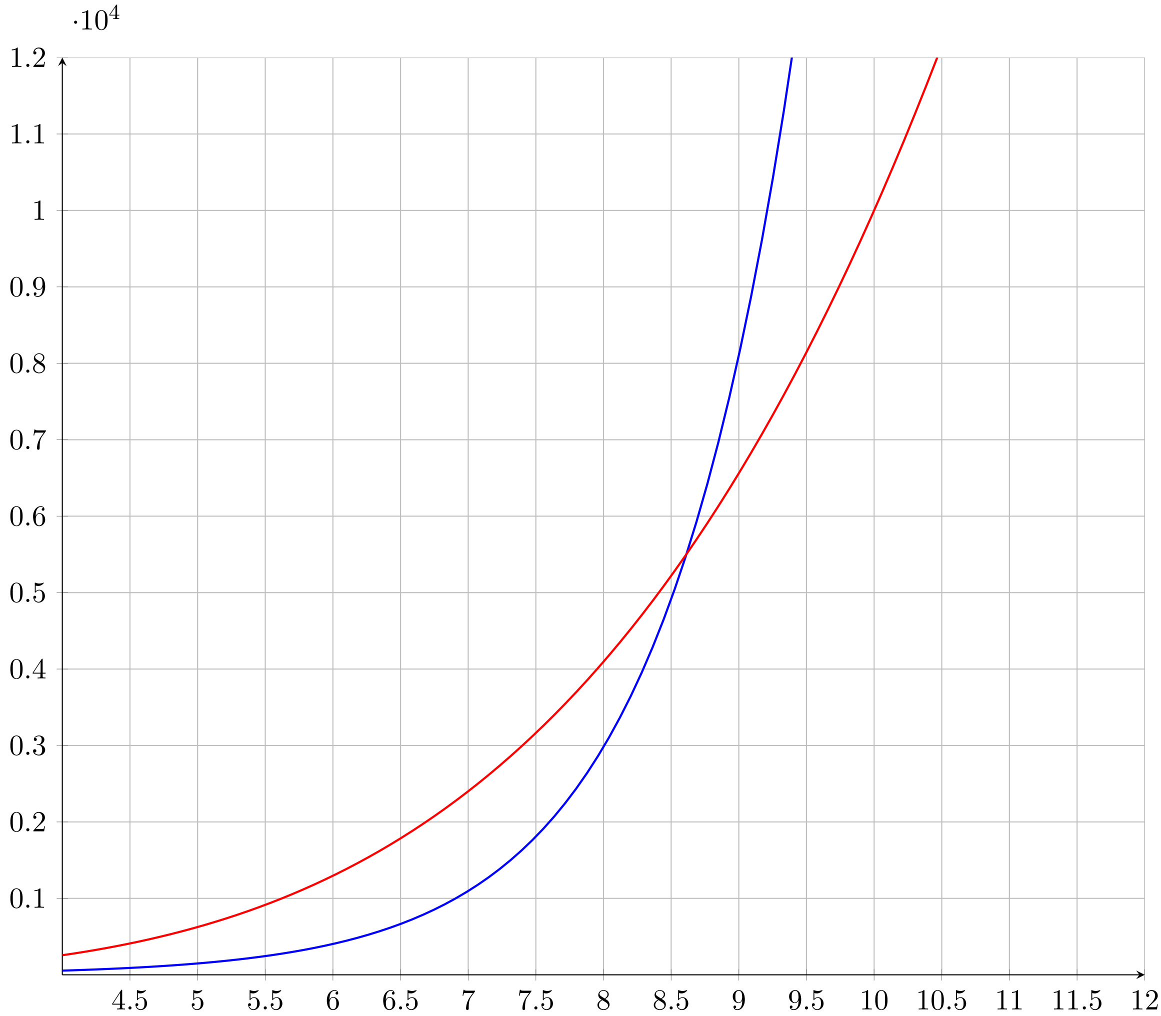
Pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n \times e^{-x} = 0$

Dans le cas de limites infinies, la fonction exponentielle impose sa limite devant les fonctions puissances. Sa croissance est plus rapide.

Propriété

Exemple

On a tracé en bleu $x \longmapsto e^x$ et en rouge $x \longmapsto x^4$



Exemple

Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{e^x}$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \times e^{-x} + \dfrac{1}{e^{2x}}$