Corrigé : Exercices

Combinatoire et dénombrement

Exercice 1/23 : Utiliser les principes additifs et multiplicatifs

1. Soit deux ensembles $E = \{a, b\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4\}$.
   Déterminer le nombre d'éléments de $E \cup F$ puis de $E \times F$.
2. Un restaurant propose un menu « plat + dessert ».
   Un client qui décide de prendre ce menu doit choisir un plat parmi les trois viandes et les deux poissons proposés, puis un dessert parmi les quatre desserts proposés.
   Déterminer le nombre de choix différents permettant de construire son menu.

Solution :

1. $Card(E \cup F) = 2 + 4 = 6$ et $Card(E \times F) = 2 \times 4 = 8$
2. $5 \times 4 = 20$ possibilités.

Exercice 2/23

1. Les numéros de téléphone commençant par 06 sont constitués du couple $(0, 6)$ que l'on complète par un 8-uplet de l'ensemble $E = \{0, 1, 2, ..., 9\}$.
   (a) Déterminer le nombre de numéros de téléphone possibles commençant par 06.
   (b) Combien de numéros de téléphone commençant par 06 ou 07 sont possibles ?
2. Pour sécuriser son compte sur un site internet, Emma doit créer un mot de passe composé de 7 lettres, uniquement avec les 26 de l'alphabet (pas de caractère spécial, pas de chiffre).
   Sa copine Fanny lui demande : « Combien de mots de passe différents peux-tu créer ? ».
   Quelle sera la réponse d'Emma ?

Solution :

1. (a) 10^8
   (b) 2×10^8
2. $26^7 = 8\ 031\ 810\ 176$

Exercice 3/23

1. Soit $E = \{a, b, c, d, e\}$.
   Combien y a-t-il de 3-uplets d'éléments distincts de E ?
2. Dans le championnat de France de rugby, composé de 14 équipes et appelé TOP 14, les six premières équipes qui ont le plus de points à la fin des matches aller-retour (phase

régulière) passent à la deuxième phase du championnat.

(a) Combien de classements composés des six équipes qui atteignent la deuxième phase sont possibles ?

(b) Lors de la saison 2018-2019, c'est le Stade Toulousain qui a fini premier de la phase régulière.
Combien de classements composés des six premières équipes de cette phase régulière étaient alors possibles avec le Stade Toulousain en tête ?

Solution :

1. $5 \times 4 \times 3 = 60$
2. (a) $14 \times 13 \times ... \times 9 = 2\ 162\ 160$
   (b) $13 \times 12 \times ... \times 9 = 154\ 440$

Exercice 4/23

1. Soit $E = \{0; 1; 2; ...; 9\}$.
   Combien de permutations de E peut-on réaliser ?
2. On reprend l'énonce de la question 2 de l'exercice 3.
   (a) Combien de classements des 14 équipes de la première phase de TOP 14 sont possibles ?
   (b) Lors de la saison 2018-2019, c'est le Stade Toulousain qui a fini premier de la phase régulière, suivi de Clermond-Ferrand.
   Combien de classements sont possibles avec ces deux équipes positionnées respectivement première et deuxième ?

Solution :

1. $10! = 3\ 628\ 800$
2. (a) $14! =$87 178 291 200
   (b) $12! = 479\ 001\ 600$

Exercice 5/23

1. Calculer $\binom{7}{3}$ puis $\binom{7}{4}$
2. On dispose d'un jeu de 32 cartes, toutes différentes. Une « main »de 4 cartes est un ensemble de 4 cartes dont l'ordre n'importe pas.
   (a) Combien de « mains »de 4 cartes peut-on alors former ?
   (b) On tire simultanément 4 cartes au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir les 4 as ?
3. Dix amis, dont Hugo et Kylian, se partagent au hasard en deux équipes de 5 pour faire un match de football à 5.
   (a) Combien d'équipes comportant Hugo et Kylian peut-on former ?
   (b) Si les équipes sont composées au hasard, quelle est la probabilité qu'Hugo et Kylian soient ensemble ? En donner l'arrondi à 0,01.

Solution :

1. $\binom{7}{3} = 35$ et $\binom{7}{4} = 35$

2. (a) $\binom{32}{4} = 35960$

   (b) $\dfrac{1}{35960}$

3. (a) $\binom{8}{3} = 56$

   (b) $\binom{10}{5} = 252$ donc la probabilité est de $\dfrac{56}{252} \approx 0,22$

Exercice 6/23

1. Le groupe sanguin d'un être humain est déterminé par un gène situé sur le chromosome 9 qui contient un couple d'éléments de l'ensemble $E = \{A, B, O\}$ ces élements sont appelés allèles.
   (a) Combien de couples d'allèles sont possibles ?
   (b) On appelle hétérozygote un gène qui est représenté par deux allèles différents. L'ordre ne compte pas. Déterminer le nombre d'hétérozygotes pour le groupe sanguin.
   (c) On appelle homozygote un gène qui contient les même allèles. On appelle génotype l'ensemble des compositions alléliques d'un individu. Déterminer alors le nombre de génotypes sanguins.
2. Pour accéder à un compte sur un site internet, un utilisateur soit saisir un mot de passe contenant deux lettres et trois chiffres. Dans chacun des cas, déterminer le nombre de mots de passe :
   (a) Lorsque le mot de passe commence par les deux lettres ;
   (b) Lorsque le mot de passe commence par les deux lettres et que les caractères sont tous différents.

Solution :

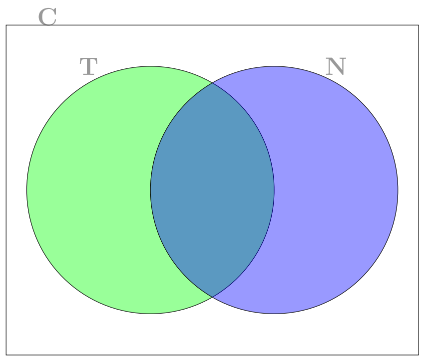
1. (a) $3^2 = 9$
   (b) $\binom{3}{2} = 3$
   (c) $3 + 3 = 6$
2. (a) $26^2 \times 10^3 =$676 000
   (b) $26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 8 =$468 000

Exercice 7/23 : Diagramme de Venn

Dans un camp de vacances hébergeant 80 personnes, 55 personnes pratiquent la natation, 33 le tennis et 16 ne pratiquent aucun de ces deux sports. Combien de personnes pratiquent à la fois le tennis et la natation ?

Solution :

– L'ensemble des personnes est nommé C. Il contient les ensembles T et N des personnes pratiquant respectivement le tennis et la natation. On fait figurer une intersection pour rester dans le cas général (quitte à ce qu'elle soit vide).



– Les différents contours découpent C en une partition dont les composantes sont $N-T$, $T-N$, $N\cap T$ et $\overline{N\cup T}$.

– En posant $Card\ (N\cap T)=n$ nous avons $Card\ (N-T)=55-n$, $Card\ (T-N)=33-n$ et $Card\ (\overline{N\cup T})=16$.
Ces ensembles formant une partition de l'univers C, on obtient :

$$Card\ (N\cap T)+Card\ (N-T)+Card\ (T-N)+Card\ (\overline{N\cup T})=n+55-n+33-n+16=80$$

Finalement, $n=24$

Exercice 8/23 : Modèle de Carrol

Une maladie atteint 3% d'une population de 30 000 habitants. On soumet cette population à un test. Parmi les bien portants, 2% ont un test positif. Parmi les personnes malades, 49 ont un test négatif. On demande combien de bien portants ont un test négatif.

Solution :

	Malades	Sains	Total
Positifs	851	582	1433
Négatifs	49	28 518	28 567
Total	900	29 100	30 000

28 518 personnes sont saines avec un test négatif.

Exercice 9/23 : Dénombrer

1. Combien peut-on former d'entiers de trois chiffres contenant au moins l'un des chiffres suivants 0, 2, 4, 6 ?
2. Aux jeux olympiques, huit compétiteurs s'affrontent pour trois médailles (or, argent, bronze). Combien y a-t-il de podiums possibles ?
3. Combien de tirages au loto comportent 4 numéros pairs et 2 numéros impairs ?
4. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot MARIE.

Solution :

1. Soit A l'ensemble des entiers de trois chiffres contenant au moins l'un des chiffres suivants 0, 2, 4, 6.
$Card\ (\overline{A})=6^3$
$Card\ (\Omega)=9\times 10\times 10$
$Card\ (A)=9\times 10\times 10-6^3=684$

2. Soit A l'ensemble des podiums possibles : $Card\ (A) = 8 \times 7 \times 6 = 336$
3. Il y a 49 numéros au loto (de 1 à 49), donc 24 pairs et 25 impairs.
   $Card\ (A) = \binom{24}{4} \times \binom{25}{2} = 3187800$
4. $Card\ (A) = 5! = 120$

Exercice 10/23 : Vrai/faux

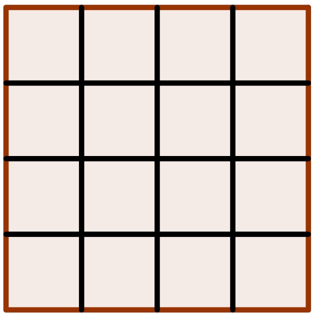
1. Le nombre de mots de 6 lettres pouvant être écrit avec les lettres $\{O, I, E, V, L\}$ est 6^5.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{n!+(n+1)!}{n+2} \in \mathbb{N}$
3. Le nombre de 10-uplets d'éléments deux à deux distincts de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ se terminant par 1 est 9!.
4. Le nombre de paires de lettres majuscules est 325.
5. Le nombre de combinaisons de 2 lettres majuscules avec répétitions est 351.
6. Le mot chien admet 126 anagrammes.
7. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [[0, n]]$
   $$\binom{n-1}{k-1} + 2\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$
8. Le nombre de paires dans un ensemble comptant n éléments est $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k$
9. $\dfrac{(2p)!}{p!} = 2$
10. $\binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 2^7$

Solution :

1. Faux : 5^6
2. Vrai : $Q = n!$
3. Vrai
4. Vrai : $\binom{26}{2}$
5. Vrai : $325 + 26$
6. Faux : $5! = 120$
7. Vrai : appliquer 3 fois la relation de Pascal
8. Vrai : somme suite arithmétique
9. Faux : $Q = (P+1) \times (P+2) \times .... \times (P+P)$
10. Faux : $S = 2^7 - 1$

Exercice 11/23

Combien peut-on tracer de carrés sur la figure ci-dessous en suivant les traits ?



Solution : $4 \times 4 + 3 \times 3 + 2 \times 2 + 1 = 30$

Exercice 12/23 : *

Un savon pour le lave-vaisselle se vend sous la forme de poudre ou de liquide. Un sondage sur les consommateurs donne les résultats suivants :

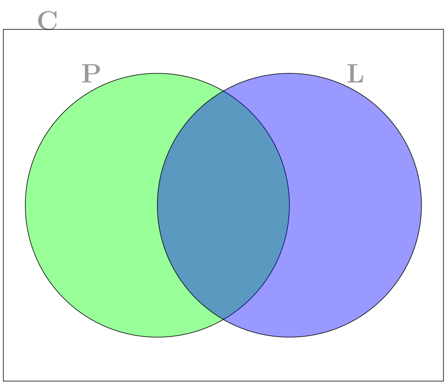
- Un tiers des personnes interrogées n'utilisent pas de poudre.
- Deux septièmes des personnes interrogées n'utilisent pas de liquide.
- Un cinquième des personnes interrogées n'utilisent pas du tout le produit.

Combien de consommateurs ont été interrogés au cours de ce sondage ?

Solution :

Soit l'ensemble C des consommateurs de cardinale n, l'ensemble L des consommateurs utilisant le liquide et l'ensemble P des consommateurs utilisant la poudre.
On utilise ici un diagramme de Venn (il est aussi possible d'utiliser le modèle de Caroll) :

- $Card\ (\overline{P}) = \dfrac{1}{3} \times n$
- $Card\ (\overline{L}) = \dfrac{2}{7} \times n$
- $Card\ (P \cap L) = 427$
- $Card\ (\overline{P \cup L}) = \dfrac{1}{5} \times n$



$$Card\ (\overline{P}) + Card\ (\overline{L}) = n - Card\ (P \cap L) + Card\ (\overline{P \cup L})$$
$$\frac{n}{3} + \frac{2n}{7} = n - 427 + \frac{n}{5}$$
$$n = 735$$

Exercice 13/23

On dispose de trois teintes pour colorier un drapeau à trois bandes verticales.

1. Combien y a-t-il de drapeaux tricolores ?
2. Combien y a-t-il de coloriages possibles ?
3. Deux bandes voisines ne pouvant être de la même couleur, combien y a-t-il de drapeaux possibles ?
4. Combien de drapeaux ont au moins deux bandes adjacentes de même couleur ?

Solution :

1. Il y a $3! = 6$ drapeaux tricolores possibles.
2. Il y a $3^3 = 27$ coloriages possibles.
3. Il y a $3 \times 2 \times 2 = 12$ drapeaux possibles.
4. Il y a $5 \times 3 = 15$ drapeaux possibles (faire un arbre).

Exercice 14/23

Sur deux chromosomes différents, on considère deux gènes d'allèles respectifs A,a et B,b. On peut avoir quatre types de gamètes avec la probabilité : AB, Ab, aB, ab.
On s'intéresse à la transmission de ces deux caractères lors de la fécondation de deux parents. Montrer qu'il y a 9 cas possibles dont on déterminera la probabilité.

Solution : Il est possible de faire un tableau pour déterminer les probabilités. Il faudra considérer que la combinaison Aa-Bb est la même que Aa-bB (d'où le -1).
Il y a $\binom{4}{2} + 4 - 1 = 9$ cas possibles.

$$\frac{4}{16} + 4 \times \frac{1}{16} + 4 \times \frac{2}{16} = 1$$

Exercice 15/23

Nos ordinateurs nous demandent sans cesse des mots de passe.

1. Combien peut-on former de codes comportant 3 lettres distinctes parmi les 26 lettres majuscules de l'alphabet suivies de 2 chiffres distincts ?
2. Un octet est constitué de 8 bits. Un bit vaut 0 ou 1. Sachant qu'un caractère ASCII est codé sur un octet dans lequel 1 bit est toujours à 0 combien de caractères comporte ce code ?

Solution :

1. $S = 26 \times 25 \times 24 \times 10 \times 9 = 14040000$
2. $S = 2^7 = 128$

Exercice 16/23

Combien de mots de 4 lettres peut-on écrire avec les 26 lettres de l'alphabet :

1. avec répétitions ?
2. sans répétitions ?

Solution :

1. $S = 26^4 = 456976$
2. $S = 26 \times 25 \times 24 \times 23 = 358800$

Exercice 17/23

Combien de mots de 4 lettres peut-on écrire avec les 26 lettres de l'alphabet :

1. Avec une seule lettre doublée ?
2. Avec deux lettres doublées ?

Solution :

1. $26 \times \dbinom{4}{2} \times 25 \times 24 = 93600$
2. $26 \times \dbinom{4}{2} \times 25 = 3900$

Exercice 18/23

Une association compte 60 membres. On choisit 5 personnes parmi les adhérents, pour former le bureau.

1. Combien de choix son possibles ?
2. En fait, dans le bureau, il faut choisir un président, un trésorier et un secrétaire. Combien de choix sont possibles ?

Solution :

1. $\dbinom{60}{5} = 5461512$
2. $\dbinom{60}{5} \times 5 \times 4 \times 3 = 327690720$

Exercice 19/23

A l'écrit d'un examen on doit traiter 8 exercices parmi 10.

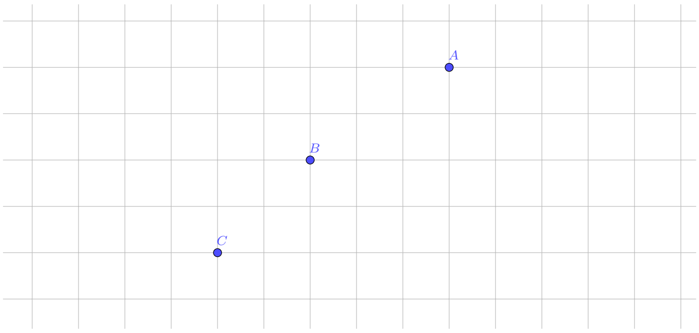
1. Combien de choix sont possibles ?
2. Combien de choix sont possibles sachant que les deux premiers exercices sont obligatoires ?

Solution :

1. $\dbinom{10}{8} = 45$
2. $\dbinom{8}{6} = 28$

Exercice 20/23

On étudie les chemins qui relient le point C au point A en suivant le quadrillage. Le chemin ne doit comporter que des pas vers le haut (H) et des pas vers la droite (D). Un tel chemin sera appelé chemin H-D.



1. Combien existe-t-il de chemins H-D reliant le point B au point A ? Les donner tous.
2. Combien existe-t-il de chemins H-D reliant le point C au point A ?
3. Combien de chemins H-D relient le point C au point A en passant par le point B ?
4. Quelle est la proportion parmi les chemins H-D reliant C à A de ceux qui passent par B ?

Solution :

1. D-D-D-H-H $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$. Il y a 10 possibilités.
2. D-D-D-D-D-H-H-H-H $\binom{9}{5} = \binom{9}{4} = 126$
3. C vers B : D-D-H-H $\binom{4}{2} = 6$
   B vers A : 10 possibilités
   C vers A : $10 \times 6 = 60$ possibilités.
4. $\dfrac{60}{126} = \dfrac{10}{21} \approx 0,476$

Exercice 21/23

On dispose de 4 urnes numérotées 1, 2, 3 et 4. On répartit 100 boules dans ces 4 urnes de la manière suivante. 40 boules dans l'urne 1. 30 boules dans l'urne 2. 20 boules dans l'urne 3 et 10 boules dans l'urne 4.
Montrer que le nombre de répartitions possibles est $\dfrac{100!}{40!30!20!10!}$

Solution : $S = \binom{100}{40} \times \binom{60}{30} \times \binom{30}{20} \times \binom{10}{10}$

Exercice 22/23

1. Au Loto, combien de tirages possibles (il faut choisir 6 numéros parmi les 49 de la grille) ?
2. Au Tiercé, combien d'arrivages possibles (17 chevaux partants, l'ordre compte) ?
3. Au Bridge, une main compte 13 cartes dans un jeu de 52.
   (a) Combien de mains possibles ?
   (b) Combien de mains comportent 4 trèfles, 3 carreaux, 3 cœurs et 3 piques ?
4. Au Poker, une main compte 5 cartes dans un jeu de 52.
   (a) Combien de mains possibles ?

(b) Combien de carré possibles (4 cartes de même valeur) ?

(c) Combien de full possibles (3 cartes de même valeur + une paire) ?

(d) Combien de brelan possibles (3 cartes de même valeur) ?

Solution :

1. $\binom{49}{6} = 13983816$
2. $S = 17 \times 16 \times 15 = 4080$
3. (a) $\binom{52}{13} = 635013559600$

   (b) $\binom{13}{4} \times \binom{13}{3} \times \binom{13}{3} \times \binom{13}{3} = 13726464040$
4. (a) $\binom{32}{5} = 2598960$

   (b) Avec un jeu de 52 cartes : Il faut choisir la figure : 13 choix puis la dernière carte parmi les 48 restantes. On a donc : $13 \times 48 = 624$ carrés possibles.

   (c) Avec un jeu de 52 cartes : on choisit la figure des trois cartes identiques soit 13 choix puis on en choisit 3 parmi les 4, on choisit ensuite la figure des deux cartes identiques soit 12 choix, on en choisit alors 2 parmi les 4, on a donc : $13 \times \binom{4}{3} \times 12 \times \binom{4}{2} = 3744$

   (d) Avec un jeu de 52 cartes : on choisit la figure des trois cartes identiques soit 13 choix puis on en choisit 3 parmi les 4 enfin on prend 2 autres cartes dans les 48 restantes sans oublier denlever les fulls :$13 \times \binom{4}{3} \times \binom{48}{2} = 54912$.

Exercice 23/23 : Vers la loi binomiale

Une urne contient 3 jetons rouges et 7 jetons bleus. On tire successivement 3 jetons dans l'urne.

1. Sans remise, faire un arbre pondéré.
   (a) Combien de tirages possibles ?
   (b) Calculer la probabilité p_1 que deux jetons soient rouges.
2. Avec remise. Faire un arbre pondéré.
   (a) Combien de tirages possibles ?
   (b) Calculer la probabilité p_2 que deux jetons soient rouges.
3. On généralise avec remise : loi binomiale. 5 tirages avec remise.
   (a) Calculer la probabilité du tirage BBRBR.
   (b) Determiner le nombre de tirages contenant exactement deux boules rouges. Puis déterminer la probabilité de l'événement A=« le nombre de boules rouges tirées est exactement 2 ».
   (c) On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées. Donner la loi de X.

Solution :

1. (a) L'ordre compte ici. Il y a 10 jetons dans l'urne donc $10 \times 9 \times 8 = 720$

   (b) La probabilité que deux jetons soient rouge est $p_1 = \dfrac{7}{40} = 0,175$ (Faire un arbre).
2. (a) $10^3 = 1000$

(b) $S = 0,189$ avec l'arbre.

3. (a) $0,7 \times 0,7 \times 0,3 \times 0,7 \times 0,3 = 0,03087$

   (b) $\binom{5}{2} = 10$
   $P(A) = 10 \times 0,03087 = 0,3087$

   (c) $P(X = k) = \binom{5}{k}(0,3)^k(0,7)^{5-k}$
   Loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,3$
   $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$