Exercices

Cosinus et sinus

Exercice 1/23

En utilisant la notion de mesure principale, donner les valeurs de $\cos\left(\frac{17\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right)$.

Exercice 2/23

Simplifier l'expression suivante :

$$A(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Exercice 3/23

Transformer $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ comme des expressions polynomiales, respectivement en $\cos(x)$, et $\sin(x)$.

Exercice 4/23

Linéariser (exprimer sans exposants),

$$\cos^3(x)$$

.

Exercice 5/23

Factoriser (écrire sous forme de produit),

$$f(x) = \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x)$$

Exercice 6/23

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

Exercice 7/23

Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation

$$2\sin(x) - \sqrt{3} < 0$$

.

Exercice 8/23

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation trigonométrique

$$\cos(x) + \sin(x) = 1$$

Exercice 9/23

Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'inéquation $\cos(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

Exercice 10/23

Déterminer de deux façons différentes la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x}$$

Exercice 11/23 : *

Étudier la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos(x)} - 1}{\sin(x)}$$

Exercice 12/23

Soit la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{2 + \cos(x)}$

1. Montrer que f est 2π périodique.
2. Montrer que f est impaire.
3. Sur quel intervalle I peut-on alors réduire l'étude de la fonction ?
4. Comment obtenir alors la représentation graphique complète de la fonction ?
5. Étudier la fonction sur l'intervalle I.

Exercice 13/23

Réduire autant que possible le domaine d'étude de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2(4x)$.

Exercice 14/23

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) - 2\cos(x)$.

1. Montrer que f est 2π périodique.
2. Montrer que f est paire.
3. En déduire un intervalle I d'étude suffisant.
4. Donner le tableau de variation de f sur I.
5. Tracer alors $\mathcal{C}_f$, courbe représentative de f, sur $[-2\pi; 2\pi]$ en utilisant vos réponses aux questions précédentes.

Exercice 15/23

Démontrer l'"égalité suivante :

$$\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x) = 4\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(x)\cos\left(\frac{5x}{2}\right)$$

Exercice 16/23

1. Linéariser $\cos^2(x)\sin^2(x)$.
2. Linéariser $\cos^3(x)\sin(x)$.
3. Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.

Exercice 17/23

1. Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ les équations suivantes :
   (a) $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$
   (b) $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   (c) $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   (d) $\cos(x) = -1$
2. Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ les inéquations suivantes :
   (a) $\sin(x) \leq -\dfrac{1}{2}$
   (b) $\cos(x) \geq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   (c) $\sin(x) < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   (d) $\cos(x) < 1$

Exercice 18/23

Étudier le sens de variation de chacune des fonctions définies ci-dessous.

1. h est définie sur $\left[\dfrac{2}{\pi};+\infty\right[$ par $h(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
2. f est définie sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 4x\right)$

Exercice 19/23

On appelle sinus cardinal la fonction, notée sinc, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$sinc(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $sinc$ est continue en 0.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $sinc(x) = 0$.
3. (a) Démontrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $-\dfrac{1}{x} \leq sinc(x) \leq \dfrac{1}{x}$.
   En déduire la limite de la fonction $sinc$ en $+\infty$.
   (b) En procédant de manière analogue sur l'intervalle $]-\infty;0[$, déterminer la limite de $sinc$ en $-\infty$.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$sinc(x) = \frac{1}{x} \text{ et } sinc(x) = -\frac{1}{x}$$

5. Visualiser à la calculatrice la courbe représentative de la fonction sinc.

Exercice 20/23

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de $\dfrac{\sin(X)}{X}$.
2. Étudier alors la continuité de f en 0.
3. Étudier la dérivabilité de f en 0.
4. Visualiser à la calculatrice la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 21/23

Soit f la fonction définie sur $[0;\pi]$ par $f(x) = \cos(2x)$.

1. **Étude des variations de f**
   (a) Calculer $f'(x)$ pour $x \in [0;\pi]$.
   (b) Résoudre sur $[0;\pi]$ l'équation $\sin(2x) = 0$.
   (c) En déduire le signe de $f'(x)$ et les variations de f sur $[0;\pi]$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$
3. Résoudre l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$.
4. Déterminer l'équation des tangentes $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses respectives 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.
5. Tracer $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthogonal, avec comme échelle en abscisse 1cm pour $\dfrac{\pi}{6}$.

Exercice 22/23 : *

La fonction tangente est la fonction qui à x associe $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x) = 0$
2. En déduire l'ensemble de définition de la fonction tangente.
3. Montrer que la fonction tan est π périodique.
   Il suffit alors d'étudier la fonction tan sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.
4. Déterminer les limites de $\tan(x)$ aux bornes de l'intervalle.

5. Démontrer que pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$,
$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$
En déduire les variations de la fonction de tangente.
6. Déterminer les valeurs de $\tan(0)$, $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

Exercice 23/23

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x \cos(x)$. On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Montrer que pour tout réel x,
$$-e^x \leq f(x) \leq e^x$$
En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote au voisinage de $-\infty$. Quelle est cette asymptote ?
2. Déterminer les abscisses des points d'intersections de $\mathcal{C}_{\{}$ avec l'axe des abscisses.
3. On étudie f sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.
   (a) Démontrer que pour tout réel x on a :
   $$\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$
   (b) Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f. Montrer que f est croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$. Dresser alors le tableau de variations de f.
4. On note f'' la fonction dérivée seconde de f. Montrer que $f''(x) = -2e^x \sin(x)$. La fonction f est-elle convexe ? concave ?
5. Justifier que le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ atteint un maximum en $x = 0$. Préciser alors sa valeur.
6. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en O.