



## Exercices

## SUITES NUMÉRIQUES

**Exercice 1/10 : Vrai ou Faux**

1. La suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = (-1)^n$  est convergente.
2. Si  $(u_n)$  est une suite de réels non nuls telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$

3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

4.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{n} = 1$

5. Soit la suite  $(t_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$\begin{cases} t_0 &= 0 \\ t_{n+1} &= t_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

La suite  $(t_n)$  admet pour terme explicite  $t_n = \frac{n}{n+1}$  lorsque  $n \geq 0$ .

6. Soit  $(u_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :

$$\begin{cases} u_1 &= 1,5 \\ u_{n+1} &= 2u_n + \frac{1}{n} \quad \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

La suite  $(u_n)$  converge vers 2.

7.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - n^2 = 0$
8. Si les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont définies par  $u_0 = 1$ ,  $u_{n+1} = 2u_n + 3$  et  $v_n = u_n + 3$ , alors la suite  $(v_n)$  est géométrique.
9. Soit  $(u_n)$  une suite numérique définie sur  $\mathbb{N}$ . On définit une suite  $(S_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ . Si la suite  $(u_n)$  est convergente, alors la suite  $(S_n)$  est convergente.
10.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$  tend vers 1 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 2/10 : Règles opératoires sur les limites**

Étudier la convergence de chacune des suites  $(u_n)$  suivantes.

1.  $u_n = n^2 + 2n + 3$

2.  $u_n = \frac{5}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \pi$  avec  $n \geq 1$

3.  $u_n = 2n^2 - 3n + 5$

4.  $u_n = \frac{n+3}{n^2+1}$

5.  $u_n = 2 \times \pi^n - 3 \times (-0,5)^n$

6.  $u_n = 5^n - 2^{n+1}$

### Exercice 3/10 : Théorème d'encadrement

Étudier la convergence des suites  $(u_n)$  suivantes.

1.  $u_n = \frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n}$  avec  $n \geq 1$

2.  $u_n = \frac{n - \cos(n)}{n + 1}$

3.  $u_n = \frac{1}{n} \cos\left(\frac{n\pi}{5}\right)$  avec  $n \geq 1$

4.  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k + n^2}$

### Exercice 4/10 : Théorème de comparaison

Les deux questions sont indépendantes.

1. La suite  $(u_n)$  est définie par  $u_n = \sqrt{n^2 + 1}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

(a) Étudier la convergence de la suite  $(u_n)$ .

(b) En déduire la limite de la suite  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = n - \sqrt{n^2 + 1}$

2. La suite  $(u_n)$  est définie par  $u_n = n + 1 - \cos(n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

(a) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $n \geq u_n \geq n + 2$ .

(b) Quel est le comportement de la suite en  $+\infty$ .

### Exercice 5/10 : Calcul de limites de suites particulières

1. Soit la suite  $(S_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $S_n = \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{3}\right)^k = 1 - \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ .  
Calculer la limite de la suite  $(S_n)$ .

2. Soit la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_0 = 1, 9$ ,  $u_1 = 1, 99$ ,  $u_2 = 1, 999, \dots$   
Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ .

3. Calculer la limite de la suite  $(S_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

### Exercice 6/10 : Suite arithmético-géométrique

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 3u_n - 1$ .

1. Calculer le réel  $b$  pour lequel la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = u_n + b$ ,  $n \in \mathbb{N}$  est géométrique.

2. Exprimer  $(v_n)$  puis  $(u_n)$  en fonction de  $n$ .

3. En déduire la limite de  $(u_n)$ .

### Exercice 7/10 : Suite arithmético-géométrique

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 61$  et pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 0,6 \times u_n + 8$ .

1. Résoudre l'équation  $x = 0,6x + 8$ . Dans la suite, on notera  $r$  la solution de cette équation.

2. On considère la  $(v_n) = (u_n - r)$ .

(a) Montrer que la suite  $v$  est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

(b) Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

(c) Déterminer la limite de la suite  $(v_n)$ .

3. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $v_n$  et déterminer la limite de la suite  $(u_n)$

### Exercice 8/10 : Suite récurrente homographique et suite auxiliaire géométrique

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$ .

On supposera ici que la suite  $(u_n)$  est bien définie autrement dit que pour  $n \in \mathbb{N} : u_n \neq -1$ .

1. On définit une suite auxiliaire  $(v_n)$  par  $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$  avec  $n \in \mathbb{N}$ . On supposera ici que pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \neq 1$ . Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique et exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
2. En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  ainsi que sa limite.

### Exercice 9/10 : Suite récurrente homographique et suite auxiliaire arithmétique

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{u_n - 4}{u_n - 3}$ .

On supposera que pour  $n \in \mathbb{N} : u_n \neq 3$ .

1. On définit une suite auxiliaire  $(v_n)$  par  $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$  avec  $n \in \mathbb{N}$ . On supposera que pour  $n \in \mathbb{N} : u_n \neq 2$ . Démontrer que la  $(v_n)$  est arithmétique et exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
2. En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  ainsi que sa limite.

### Exercice 10/10 : Exercice classique

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$ .

1. Soit la suite  $(v_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par  $v_n = u_n - n + 1$ .
  - (a) Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique.
  - (b) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 3^n + n - 1$ .
2. En déduire que la suite  $(u_n)$  est croissante et étudier sa limite.
3. (a) Soit  $p$  un entier naturel non nul. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier  $n_0$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n \geq 10^p$ ?  
On s'intéresse maintenant au plus petit entier  $n_0$ .
  - (b) Justifier que  $n_0 \leq 3p$ .
  - (c) Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier  $n_0$  pour la valeur  $p = 3$ .
  - (d) Proposer un algorithme qui, pour une valeur de  $p$  donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier  $n_0$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ , on a  $u_n \geq 10^p$ .