Corrigé : Exercices

Suites numériques

Exercice 1/10 : Vrai ou Faux

1. La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ est convergente.
2. Si (u_n) est une suite de réels non nuls telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+1}{n} = 1$
5. Soit la suit (t_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} t_0 & = 0 \\ t_{n+1} & = t_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \quad \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$
La suite (t_n) admet pour terme explicite $t_n = \dfrac{n}{n+1}$ lorsque $n \geq 0$.
6. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
$$\begin{cases} u_1 & = 1,5 \\ u_{n+1} & = 2u_n + \dfrac{1}{n} \quad \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$
La suite (u_n) converge vers 2.
7. $\lim\limits_{n\to+\infty} n - n^2 = 0$
8. Si les suites (u_n) et (v_n) sont définies par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $v_n = u_n + 3$, alors la suite (v_n) est géométrique.
9. Soit (u_n) une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$. On définie une suite (S_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Si la suite (u_n) est convergente, alors la suite (S_n) est convergente.
10. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + ... + \dfrac{1}{2^n}$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. faux
2. faux
3. vrai
4. faux
5. vrai
6. faux
7. faux

8. vrai
9. faux
10. vrai

Exercice 2/10 : Règles opératoires sur les limites

Étudier la convergence de chacune des suites (u_n) suivantes.

1. $u_n = n^2 + 2n + 3$
2. $u_n = \dfrac{5}{n^2} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \pi$ avec $n \geq 1$
3. $u_n = 2n^2 - 3n + 5$
4. $u_n = \dfrac{n+3}{n^2+1}$
5. $u_n = 2 \times \pi^n - 3 \times (-0,5)^n$
6. $u_n = 5^n - 2^{n+1}$

Solution :

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pi$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$
5. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
6. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Exercice 3/10 : Théorème d'encadrement

Étudier la convergence des suites (u_n) suivantes.

1. $u_n = \dfrac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n}$ avec $n \geq 1$
2. $u_n = \dfrac{n - \cos(n)}{n+1}$
3. $u_n = \dfrac{1}{n} \cos(\dfrac{n\pi}{5}$ avec $n \geq 1$
4. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{k+n^2}$

Solution :

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

Exercice 4/10 : Théorème de comparaison

Les deux questions sont indépendantes.

1. La suite (u_n) est définie par $u_n = \sqrt{n^2+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Étudier la convergence de la suite (u_n).
   (b) En déduire la limite de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = n - \sqrt{n^2+1}$
2. La suite (u_n) est définie par $u_n = n + 1 - \cos(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $n \geq u_n \geq n+2$.
   (b) Quel est le comportement de la suite en $+\infty$.

Solution :

1. La suite (u_n) est définie par $u_n = \sqrt{n^2+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (a) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
   (b) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

2. La suite (u_n) est définie par $u_n = n + 1 - \cos(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Utiliser $-1 \leq cos(x) \leq 1$
   (b) $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exercice 5/10 : Calcul de limites de suites particulières

1. Soit la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-\frac{1}{3})^k = 1 - \frac{1}{3} + (-\frac{1}{3})^2 + ... + (-\frac{1}{3})^n$.
   Calculer la limite de la suite (S_n).
2. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1,9$, $u_1 = 1,99$, $u_2 = 1,999$,...
   Calculer la limite de la suite (u_n).
3. Calculer la limite de la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

Solution :

1. $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{4}$
2. $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$
3. $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$

Exercice 6/10 : Suite arithmético-géométrique

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 1$.

1. Calculer le réel b pour lequel la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + b$, $n \in \mathbb{N}$ est géométrique.
2. Exprimer (v_n) puis (u_n) en fonction de n.
3. En déduire la limite de (u_n).

Solution :

1. $b = -0,5$
2. $v_n = 0,5 \times 3^n$ et $u_n = 0,5 \times (3^n + 1)$
3. $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exercice 7/10 : Suite arithmético-géométrique

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 61$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,6 \times u_n + 8$.

1. Résoudre l'équation $x = 0,6x + 8$. Dans la suite, on notera r la solution de cette équation.
2. On considère la $(v_n) = (u_n - r)$.
   (a) Montrer que la suite v est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de la suite (v_n).
3. Exprimer u_n en fonction de v_n et déterminer la limite de la suite (u_n)

Solution :

1. $r = \frac{8}{0,4} = 20$

2. On considère la $(v_n) = (u_n - r)$.
   (a) $v_{n+1} = 0,6u_n + 8 - 20$ donc $v_{n+1} = 0,6u_n - 12 = 0,6(u_n - 20) = 0,6v_n$
   Suite géométrique de raison 0,6 et de premier terme $v_0 = 41$.
   (b) $v_n = 41 \times 0,6^n$
   (c) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$
3. $u_n = 41 \times 0,6^n + 20$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 20$

Exercice 8/10 : Suite récurrente homographique et suite auxiliaire géométrique

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$.
On supposera ici que la suite (u_n) est bien définie autrement dit que pour $n \in \mathbb{N} : u_n \neq -1$.

1. On définit une suite auxiliaire (v_n) par $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$ avec $n \in \mathbb{N}$. On supposera ici que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et exprimer v_n en fonction de n.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n ainsi que sa limite.

Solution :

1. $v_{n+1} = \dfrac{2}{3}v_n$ donc $v_n = 2 \times (\dfrac{2}{3})^n$
2. $u_n = \dfrac{(\frac{2}{3})^n \times 2 - 2}{(\frac{2}{3})^n \times 2 - 1}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Exercice 9/10 : Suite récurrente homographique et suite auxiliaire arithmétique

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 3}$.
On supposera que pour $n \in \mathbb{N} : u_n \neq 3$.

1. On définit une suite auxiliaire (v_n) par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$ avec $n \in \mathbb{N}$. On supposera que pour $n \in \mathbb{N} : u_n \neq 2$. Démontrer que la (v_n) est arithmétique et exprimer v_n en fonction de n.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n ainsi que sa limite.

Solution :

1. $v_{n+1} = v_n - 1$ donc $v_n = -\dfrac{1}{2} + n \times (-1)$
2. $u_n = \dfrac{1}{-\frac{1}{2} + n \times (-1)} + 2$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Exercice 10/10 : Exercice classique

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.
2. En déduire que la suite (u_n) est croissante et étudier sa limite.
3. (a) Soit p un entier naturel non nul. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq 10^p$?
   On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0.
   (b) Justifier que $n_0 \leq 3p$.
   (c) Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p = 3$.
   (d) Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n \geq 10^p$.

Solution :

1. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.
   (a) $v_n = 3^n$
   (b) $u_n = 3^n + n - 1$.
2. $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
3. (a) limite
   (b) $u_{3p} \geq 27^p \geq 10^p$
   (c) $n_0 = 7$
   (d) Boucle “ Tant que ”