



Exercices

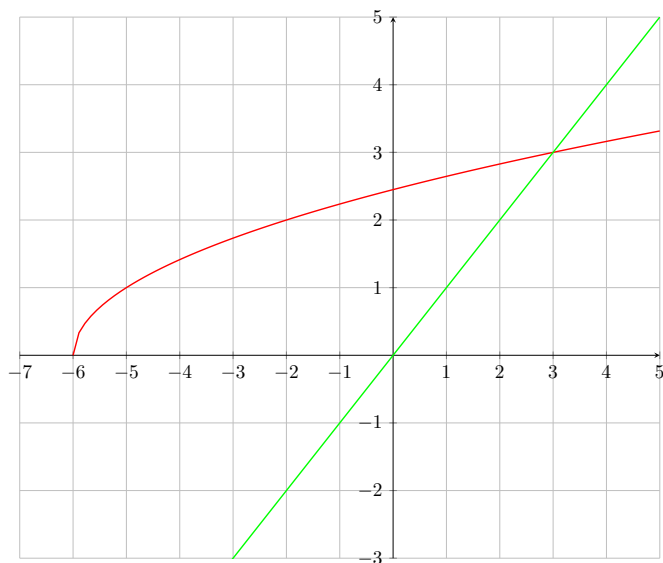
SUITES NUMÉRIQUES

Exercice 1/30

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$$

Représenter sur l'axe des abscisses les premiers termes de la suite (u_n) .

Exercice 2/30

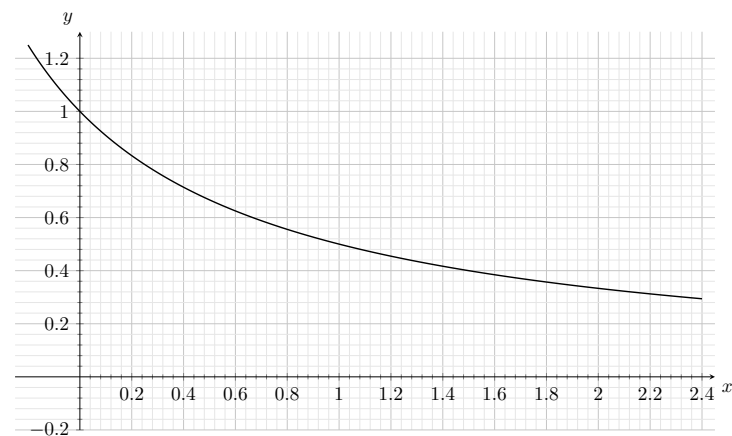
On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{u_n + 0,5}.$$

On a représenté ci-dessous la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Représenter les quatre premiers termes de la suite sur les axes, puis conjecturer le comportement de la suite (variations et limites éventuelles).



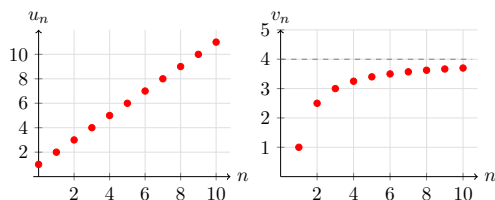
Exercice 3/30

Pour chacune des suites ci-dessous, cocher les bonnes réponses.

La suite (u_n) est :	géométrique	arithmétique	croissante	décroissante	Non monotone
1) $u_n = 2n + 3$					
2) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$					
3) $u_n = (-1)^n$					
4) $u_n = n^2$					
5) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$					

Exercice 4/30

Conjecturer graphiquement le sens de variation et la limite des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) , puis justifier leur limite.



1. $u_n = n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $v_n = 4 - \frac{3}{n}$ pour $n \geq 1$.
3. $w_n = \frac{3}{n^2 + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5/30

Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = n^3$.

1. A partir de quel rang a-t-on, $v_n > 1000$?
2. A l'aide de la définition, montrer que (v_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 6/30

Voici une proposition : « Si la suite (u_n) converge vers ℓ , alors à partir d'un certain rang, tous les termes u_n appartiennent à $]\ell - 0, 2; \ell + 0, 2[$. »

1. Cette proposition est-elle correcte ?
2. (a) Énoncer la réciproque de cette proposition.
(b) Cette proposition réciproque est-elle vraie ? Justifier.

Exercice 7/30

Donner la limite de chacune des suites.

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 + 3n)$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{4n^2 + 1}$
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-4n^2 + 3)$
5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right)^2$
6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n} - 3 + 4n\right)$

Exercice 8/30

1. Compléter :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = \dots \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n = \dots \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \dots$$

$$\text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = \dots$$

2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - n)$.

Exercice 9/30

Déterminer, si elle existe, la limite de la suite de terme général u_n .

1. $u_n = 2n^2 + 3n - 3$
2. $u_n = n^2 - n + 1$
3. $u_n = \frac{2}{n+2}$
4. $u_n = \frac{3n^2 + 2}{n+3}$
5. $u_n = \frac{4n-2}{n+8}$
6. $u_n = \frac{1}{n}(2 - 3n + 8n^2)$

Exercice 10/30 : Règles opératoires sur les limites (Non exigible)

Étudier la convergence de chacune des suites (u_n) suivantes.

1. $u_n = n^3 - 2n^2 + 3$
2. $u_n = \frac{5}{n^4} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \pi$ avec $n \geq 1$
3. $u_n = \frac{2n^3 + 3n + 5}{n^2 + n - 2}$
4. $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$
5. $u_n = 2 \times \pi^n - 3 \times (0,5)^n$
6. $u_n = 8^n - 2^{n+1}$

Exercice 11/30

Déterminer la limite des suites (u_n) :

1. $u_n = 5n^2 + 2\sqrt{n} + 1$

2. $u_n = -n^3 + 5$

3. $u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{n^2}$

4. $u_n = (-n^3)(3n^2 + 4)$

5. $u_n = \frac{3}{3 - 4n^2}$

6. $u_n = \left(-7 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)(n + 1)$

Exercice 12/30

1. Déterminer les limites des suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 2 - \frac{1}{n}$ et $v_n = -7 + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

2. En déduire la limite de la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$w_n = \frac{2 - \frac{1}{n}}{-7 + \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

Exercice 13/30

Dans chacun des cas, déterminer la limite de la suite (u_n) .

1. $u_n = \frac{n^2}{-3 + \frac{1}{\sqrt{n}}}$

2. $u_n = \frac{\frac{5}{n} + 9}{-3 + \frac{2}{n^2}}$

Exercice 14/30

Déterminer la limite des suites définies par :

1. $u_n = n^2 + 5n + 3$

2. $v_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 2\right)(-n^3 + 1)$

3. $i_n = \frac{2}{u_n}$

Exercice 15/30

Déterminer la limite des suites définies par :

1. $u_n = (2 - 3n)(n^2 + 5)$

2. $u_n = 3n^2 + 5n - 11$

3. $u_n = -n^3 - 3n + \frac{1}{n^2}$

4. $u_n = \frac{5}{5 + 3n}$

5. $u_n = (2n^2 - 5)(-3n^2 - 8)$

6. $u_n = n^5 + \frac{\sqrt{n}}{8} + \frac{1}{n}$

7. $u_n = \frac{1}{n} \times \frac{4}{4 - 5n}$

Exercice 16/30

Déterminer la limite des suites définies par :

1. $u_n = n^2 - 2n$

3. $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^3}$

2. $u_n = \frac{5 + n + n^2}{n}$

4. $u_n = \frac{n^2}{\sqrt{n}}$

Exercice 17/30

Déterminer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = 4n^2 + (-1)^n$

3. $u_n = -n^2 + 6 \cos n$

2. $u_n = -3n - (-1)^n$

4. $u_n = \frac{\sin n}{n}$

Exercice 18/30 : Théorème d'encadrement

Étudier la convergence des suites (u_n) suivantes.

1. $u_n = \frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n^2}$ avec $n \geq 1$

3. $u_n = \frac{1}{n} \cos\left(\frac{n\pi}{5}\right)$ avec $n \geq 1$

2. $u_n = \frac{n^2 - \cos(n)}{n^2 + 1}$

4. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k + n^2}$

Exercice 19/30

1. $u_n = n - \sin n$

3. $u_n = -n^2 + \cos n$

2. $u_n = \frac{n}{2 + \cos n}$

4. $u_n = \frac{n - \sin n}{n^2 + 1}$

Exercice 20/30

1. $u_n = \frac{4n + (-1)^n}{n + 2}$

3. $u_n = \frac{-n + (-1)^n}{2n - (-1)^n}$

2. $u_n = 5n^3 + (-1)^n$

4. $u_n = \frac{n^2 + (-1)^n \sqrt{n}}{n}$

Exercice 21/30

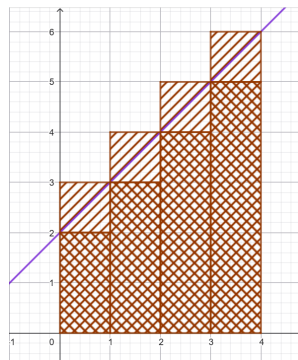
1. Soit (u_n) une suite qui vérifie $u_n \geq 3n^2 - 1$ pour tout entier naturel n . Déterminer la limite de la suite (u_n) .
2. Soit (u_n) une suite telle que $u_n \leq -5n$ pour tout entier naturel n . Déterminer la limite de la suite (u_n) .
3. Soit (u_n) une suite telle que $\frac{1}{n} \leq n \leq \frac{2}{n}$ pour tout $n \geq 1$. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 22/30 : Méthode d'approximation de Riemann

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par $f(x) = x + 2$.

On divise l'intervalle $[0; 4]$ en 4 segments de largeur 1 et on construit quatre rectangles « inférieurs » (grillage) et quatre rectangle « supérieurs » (traits simples).

On note $\mathcal{A}$ l'aire du trapèze sous la courbe.



1. Calculer l'aire totale des rectangles inférieurs et l'aire totale des rectangles supérieurs.
2. En déduire un encadrement de $\mathcal{A}$.
3. Soit un entier naturel n supérieur ou égal à 1.

On partage maintenant l'intervalle $[0; 4]$ en n segments de largeur $\frac{4}{n}$ et on construit de la même façon n rectangles « inférieurs » et n rectangles « supérieurs ». On note u_n l'aire totale des rectangles « inférieurs » et v_n l'aire totale des rectangles « supérieurs ».

- (a) Donner u_4 et v_4 .

On peut montrer que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 8 \left(\frac{n-1}{n} + 1 \right) \quad \text{et} \quad v_n = 8 \left(\frac{n+1}{n} + 1 \right)$$

- (b) Justifier que, pour tout entier naturel n :

$$u_n \leq \mathcal{A} \leq v_n$$

4. En considérant la suite (w_n) constante égale à $\mathcal{A}$, en déduire la valeur de $\mathcal{A}$.

Exercice 23/30 : Théorème de comparaison

Les deux questions sont indépendantes.

1. La suite (u_n) est définie par $u_n = \sqrt{n^2 + 1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Étudier la convergence de la suite (u_n) .

- (b) En déduire la limite de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = n - \sqrt{n^2 + 1}$
2. La suite (u_n) est définie par $u_n = n + 1 - \cos(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Démontrer que pour tout entier naturel n , on a : $n \geq u_n \geq n + 2$.
 - (b) Quel est le comportement de la suite en $+\infty$.

Exercice 24/30

Étudier dans chaque cas la convergence de la suite (u_n) .

1. $u_n = -\frac{n^5}{5} + \frac{n^2}{4} - e$
2. $u_n = \frac{n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 4}$
3. $u_n = \frac{5 \cos(n)}{n^2}$
4. $u_n = 5(-1)^n + n^2$

Exercice 25/30

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = \frac{(-1)^n \sin(n)}{n^3}$.

1. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $-\frac{1}{n^3} \leq u_n \leq \frac{1}{n^3}$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 26/30

Déterminer, si elle existe, la limite des suites u_n :

1. $\left(\frac{2n + (-1)^n \sqrt{n}}{n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$
2. $\left(n \sin \left(\frac{1}{n} \right) \right)_{n > 0}$
3. $\left(\frac{\sqrt{n}}{\ln n} \right)_{n > 1}$

Exercice 27/30

Étudier la convergence des suites définies ci-dessous :

1. $u_n = \frac{4 + (-1)^n}{n^2}$ avec $n \geq 1$
2. $v_n = \frac{1}{\sqrt{n} - \cos(n)}$ pour $n \geq 1$
3. $w_n = n^3 + (-1)^n$

Exercice 28/30

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - 3n + 1$.

1. Justifier pourquoi pour tout réel $A > 0$ il existe un rang N à partir duquel $u_n > A$.
2. Écrire un algorithme qui peut retourner ce rang N après que l'utilisateur ait rentré le réel A .
3. Implémenter l'algorithme précédent puis déterminer le rang N à partir duquel on a $u_n > 10^7$.

Exercice 29/30 : Un peu de Python

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et par la relation $u_{n+1} = u_n + n + 1$ pour tout entier naturel n .

1. Compléter l'algorithme ci-contre pour que
la variable n contienne après son exécution
le plus petit entier naturel n_0 tel que u_{n_0} est
strictement supérieur à A .

$u \leftarrow \dots$
 $n \leftarrow \dots$
Tant que
 $u \leftarrow \dots$
 $n \leftarrow \dots$
Fin Tant que
2. Programmer cet algorithme sous forme d'une fonction Python et le tester avec $A = 200$
puis $A = 5\,000$.

Exercice 30/30

Soit A un réel et (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et par la relation $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$ pour tout entier naturel n .

Écrire un algorithme retournant le plus petit entier naturel n tel que u_n est strictement supérieur à A .