Exercices

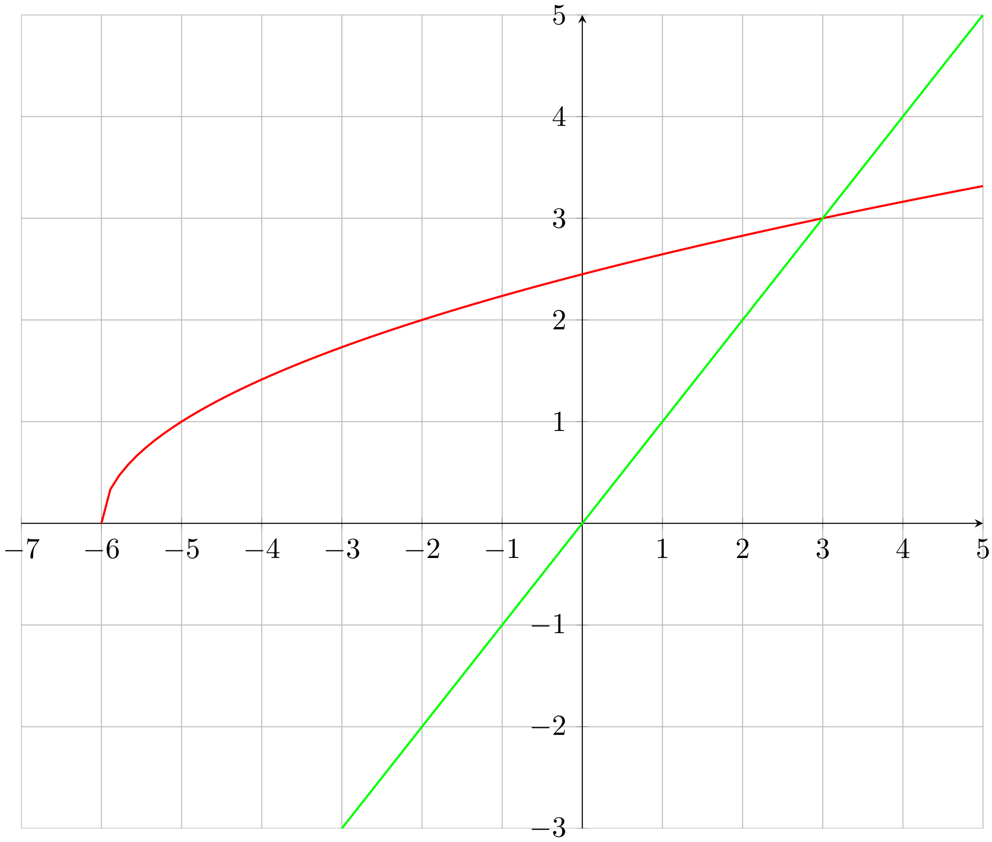
Suites numériques

Exercice 1/33

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$$

Représenter sur l'axe des abscisses les premiers termes de la suite (u_n).



Exercice 2/33

Déterminer, si elle existe, la limite de la suite de terme général u_n.

1. $u_n = 2n^2 + 3n - 3$
2. $u_n = n^2 - n + 1$
3. $u_n = \dfrac{2}{n+2}$
4. $u_n = \dfrac{3n^2+2}{n+3}$
5. $u_n = \dfrac{4n-2}{n+8}$
6. $u_n = \dfrac{1}{n}(2 - 3n + 8n^2)$

Exercice 3/33

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n \sin(n)}{n^3}$.

1. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $-\dfrac{1}{n^3} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n^3}$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 4/33 : Retour sur la récurrence

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.

1. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.
2. Démontrer que cette suite converge et déterminer sa limite.

Exercice 5/33

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{3+1} + \frac{1}{\left(3+\frac{1}{2}\right)^2} + \ldots + \frac{1}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}$$

et (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$v_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq v_n$.
2. Montrer que la suite (v_n) est majorée.
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante. Étudier alors la convergence de la suite (u_n).
4. Donner un encadrement de la limite de (u_n).

Exercice 6/33

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{4} \times \ldots \times \dfrac{2n-1}{2n}$.

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
2. Pourquoi peut-on affirmer que la suite (u_n) converge ?

Exercice 7/33

Dans chacune des questions suivantes , une ou plusieurs affirmations sont vraies. Justifier lesquelles.

1. Une suite décroissante et positive :

   (a) tend vers 0
   (b) converge
   (c) peut ne pas être majorée
   (d) est majorée

2. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3n+4}{n+1}$.
   La suite (u_n) est :

(a) croissante
(b) décroissante
(c) minorée
(d) majorée

3. Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\lim\limits_{u_n \to +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{v_n \to +\infty} v_n = -\infty$.
Alors $u_n - v_n$ a pour limite :

(a) 0
(b) $+\infty$
(c) $-\infty$
(d) On ne peut pas conclure.

4. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^2+1} + ... + \dfrac{1}{n^2+n}$.

(a) (u_n) converge vers 0
(b) (u_n) converge vers un réel non nul
(c) $\lim\limits_{u_n \to +\infty} u_n = +\infty$
(d) (u_n) est bornée.

5. Soit (u_n) une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2n$. Alors :

(a) (u_n) est croissante
(b) (u_n) est majorée
(c) (u_n) n'est pas majorée
(d) (u_n) diverge vers $+\infty$

Exercice 8/33 : Nombre d'Erdös et nombre de Champernowne.

1. On pose $u_1 = 0,2$; $u_2 = 0,23$; $u_3 = 0,235$; ... ; u_n est le nombre obtenu en juxtaposant les n premiers nombres premiers après la virgule.
Démontrer que la suite est convergente.
2. On pose $u_1 = 0,1$; $u_2 = 0,12$; $u_3 = 0,123$; ... ; $u_{10} = 0,12345678910$; (u_n) est le nombre obtenu en juxtaposant les n premiers nombres entiers après la virgule. Démontrer que cette suite est convergente.

Exercice 9/33

Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = n^3$.

1. A partir de quel rang a-t-on, $v_n > 1000$?
2. A l'aide de la définition, montrer que (v_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 10/33 : Règles opératoires sur les limites

Étudier la convergence de chacune des suites (u_n) suivantes.

1. $u_n = n^3 - 2n^2 + 3$
2. $u_n = \dfrac{5}{n^4} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \pi$ avec $n \geq 1$
3. $u_n = \dfrac{2n^3 + 3n + 5}{n^2 + n - 2}$
4. $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$
5. $u_n = 2 \times \pi^n - 3 \times (0,5)^n$
6. $u_n = 8^n - 2^{n+1}$

Exercice 11/33 : Théorème d'encadrement

Étudier la convergence des suites (u_n) suivantes.

1. $u_n = \dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n^2}$ avec $n \geq 1$
2. $u_n = \dfrac{n^2-\cos(n)}{n^2+1}$
3. $u_n = \dfrac{1}{n}\cos(\dfrac{n\pi}{5})$ avec $n \geq 1$
4. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{k+n^2}$

Exercice 12/33

Déterminer, si elle existe, la limite des suites u_n :

1. $\left(\dfrac{2n+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
2. $\left(n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n>0}$
3. $\left(\dfrac{\sqrt{n}}{\ln n}\right)_{n>1}$

Exercice 13/33 : Théorème de comparaison

Les deux questions sont indépendantes.

1. La suite (u_n) est définie par $u_n = \sqrt{n^2+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Étudier la convergence de la suite (u_n).
   (b) En déduire la limite de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = n - \sqrt{n^2+1}$
2. La suite (u_n) est définie par $u_n = n+1-\cos(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $n \geq u_n \geq n+2$.
   (b) Quel est le comportement de la suite en $+\infty$.
3. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2^n - n$. Démontrer par récurrence que pour tout naturel $n \geq 3,\ u_n \geq 1,5^n$. En déduire la divergence de (u_n).

Exercice 14/33 : Calcul de limites de suites particulières

1. Soit la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-\dfrac{1}{3})^k = 1 - \dfrac{1}{3} + (-\dfrac{1}{3})^2 + ... + (-\dfrac{1}{3})^n$.
   Calculer la limite de la suite (S_n).
2. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1,9,\ u_1 = 1,99,\ u_2 = 1,999$,...
   Calculer la limite de la suite (u_n).
3. Calculer la limite de la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$

Exercice 15/33

1. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$. Démontrer que la suite (u_n) est majorée par 3.
2. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = n^2-2n+17-\dfrac{1}{n^2}$. Démontrer par des minorations successives que la suite (u_n) est minorée.
3. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est bornée. On pourra calculer les premiers termes de la suite (u_n) pour conjecturer un de ses minorants et majorants.

Exercice 16/33

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2-3n+1$.

1. Justifier pourquoi pour tout réel $A > 0$ il existe un rang N à partir duquel $u_n > A$.

2. Écrire un algorithme qui peut retourner ce rang N après que l'utilisateur ait rentré le réel A.
3. Implémenter l'algorithme précédent puis déterminer le rang N à partir duquel on a $u_n > 10^7$.

Exercice 17/33

La suite (u_n) est définie par $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}$ pour $n \in \mathbb{N}$ avec $u_0 = 1$.

1. Représenter dans un repère les premiers termes de la suite (u_n) et émettre des conjectures.
2. Quel est le comportement de la suite (u_n) en $+\infty$? Le prouver.
3. Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 18/33

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Établir l'égalité $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$ lorsque $k \geq 2$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Démontrer que la suite (u_n) est majorée.
4. En déduire la convergence de la suite (u_n).

Exercice 19/33

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$.

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2-x)$. Montrer que f est strictement croissante dans l'intervalle $[0;1]$ et que pour tout $x \in [0;1],\ f(x) \in [0;1]$.
2. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [0;1]$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer alors sa limite ℓ.

Exercice 20/33 : Type bac

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel $n,\ u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n,\ u_n \geq n$.
   (b) En déduire la limite de la suite (u_n).
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel $n,\ u_n = 3^n + n - 1$.
5. (a) Soit p un entier naturel non nul. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0,\ u_n \geq 10^p$?
   On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0.

(b) Justifiez que $n_0 \leq 3p$.

(c) Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p = 3$

(d) Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n \geq 10^p$.

Exercice 21/33

(u_n) est une suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 3 - \dfrac{4}{u_n + 1}$.

1. Démontrer que pour tout naturel n, $u_n \in [1; 2]$.
2. Vérifier que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{(u_n - 1)^2}{u_n + 1}$
3. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
4. Démontrer que la suite (u_n) converge et calculer sa limite.
5. Démontrer que la suite (S_n) définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ diverge vers $+\infty$.
6. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il retourne la valeur de S_n une fois que l'utilisateur a saisi la valeur de n :

```
Entree : n un entier naturel
Variables :
  u, s sont des variables réelles
  n, i sont des variables entières
Initialisation :
  u prend la valeur 2
  s prend la valeur u
  i prend la valeur 0
  Demander la valeur de n
Traitement :
TantQue ...
    Affecter à i la valeur i+1
    Affecter à u la valeur ...
    Affecter à s la valeur ...
FinTantQue
Sortie :
  Afficher s
```

Exercice 22/33 : Vrai ou Faux

1. La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ est convergente.
2. Si (u_n) est une suite de réels non nuls telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

4. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2+1}{n} = 1$
5. Soit la suit (t_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} t_0 & = 0 \\ t_{n+1} & = t_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \quad \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$
La suite (t_n) admet pour terme explicite $t_n = \dfrac{n}{n+1}$ lorsque $n \geq 0$.
6. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
$$\begin{cases} u_1 & = 1,5 \\ u_{n+1} & = 2u_n + \dfrac{1}{n} \quad \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$
La suite (u_n) converge vers 2.
7. $\lim\limits_{n \to +\infty} n - n^2 = 0$
8. Si les suites (u_n) et (v_n) sont définies par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $v_n = u_n + 3$, alors la suite (v_n) est géométrique.
9. Soit (u_n) une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$. On définie une suite (S_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Si la suite (u_n) est convergente, alors la suite (S_n) est convergente.
10. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + ... + \dfrac{1}{2^n}$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.
11. Soit (u_n) une suite bornée sur $\mathbb{N}$ alors la suite $\dfrac{u_n}{n}$ avec $n \geq 1$ est convergente.
12. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq u_n \leq 3$
13. Soit (u_n) une suite récurrente définie sur $\mathbb{N}$ et de termes strictement positifs. On considère également une suite récurrente définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{2}{u_n}$. Si la suite (v_n) est majorée et la suite (u_n) décroissante alors la suite (v_n) est convergente.
14. Soit une suite (u_n) qui vérifie pour tout entier naturel $n \geq 1$, $|u_n - \sqrt{2}| \leq \dfrac{1}{n}|u_n|$. Si la suite (u_n) est bornée alors elle converge vers $\sqrt{2}$.
15. Toute suite majorée convergente est croissante.
16. Soit une suite (u_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}$ et $u_0 = 1$. La suite (u_n) est croissante et majorée.

Exercice 23/33 : Suite arithmético-géométrique

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 1$.

1. Calculer le réel b pour lequel la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + b$, $n \in \mathbb{N}$ est géométrique.
2. Exprimer (v_n) puis (u_n) en fonction de n.
3. En déduire la limite de (u_n).

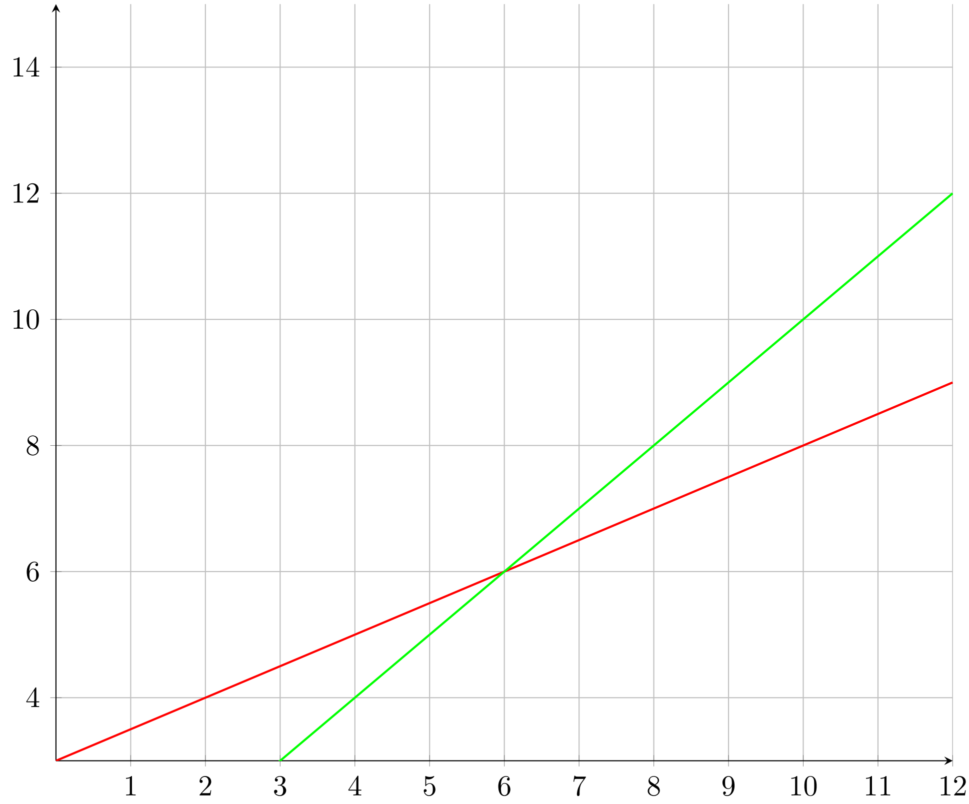
Exercice 24/33 : Suite arithmético-géométrique

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,5 \times u_n + 3$.

1. Résoudre l'équation $x = 0,5x + 3$. Dans la suite, on notera r la solution de cette équation.
2. On considère la $(v_n) = (u_n - r)$.

(a) Montrer que la suite v est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
(b) Exprimer v_n en fonction de n.
(c) Déterminer la limite de la suite (v_n).

3. Exprimer u_n en fonction de v_n et déterminer la limite de la suite (u_n)
4. Représenter sur le graphique ci-dessous, u_0, u_1, u_2 et u_3. Votre construction est-elle conforme avec le résultat de la question précédente ? (On a représenté en vert la courbe représentative de la fonction d'équation $y = x$ et en rouge $y = 0.6x + 8$)



Exercice 25/33 : Suite récurrente homographique et suite auxiliaire géométrique

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$.
On supposera ici que la suite (u_n) est bien définie autrement dit que pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n \neq -1$.

1. On définit une suite auxiliaire (v_n) par $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$ avec $n \in \mathbb{N}$. On supposera ici que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et exprimer v_n en fonction de n.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n ainsi que sa limite.

Exercice 26/33 : Suite récurrente homographique et suite auxiliaire arithmétique

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 3}$.
On supposera que pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n \neq 3$.

1. On définit une suite auxiliaire (v_n) par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$ avec $n \in \mathbb{N}$. On supposera que pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n \neq 2$. Démontrer que la (v_n) est arithmétique et exprimer v_n en fonction de n.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n ainsi que sa limite.

Exercice 27/33 : Sauvegarde d'une espèce

La population du chabot du lez diminue de 25% par an. La population du 1er mars 2020 était de 3000 individus. Il est décidé d'introduire 400 alevins tous les ans pour enrayer la disparition de l'espèce. On note u_n le nombre d'individus, en milliers, présents dans la rivière le 1er mars $2020 + n$.

1. Expliquer pourquoi $u_0 = 3$ et $u_1 = 2.65$.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Déterminer la suite constante égale à l qui vérifie la même relation de récurrence que (u_n).
4. Montrer que la suite $(u_n - l)$ est géométrique de raison 0.75. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n) quand n tend vers l'infini. Interpréter le résultat pour la situation étudiée.

Exercice 28/33

Déterminer le sens de variation de chacune des suites :

1. La suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n!$,
2. La suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{n!}{2^n}$,
3. La suite (w_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$w_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$$

,

4. La suite (z_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $z_n = \dfrac{1}{n \times n!}$.

Exercice 29/33 : Un peu de Python

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et par la relation $u_{n+1} = u_n + n + 1$ pour tout entier naturel n.

1. Compléter l'algorithme ci-contre pour que la variable n contienne après son exécution le plus petit entier naturel n_0 tel que u_{n_0} est strictement supérieur à A.

$u \leftarrow$ ....
$n \leftarrow$ ....
Tant que ......
$u \leftarrow$ ......
$u \leftarrow$ ......
Fin Tant que

2. Programmer cet algorithme sous forme d'une fonction Python et le tester avec $A = 200$ puis A =5 000.

Exercice 30/33 : Pour aller plus loin

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,5$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$$

.

1. La suite (u_n) est-elle monotone ? Justifier votre résultat.

2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0,5 \leq u_n \leq 1,3$.
3. Prouver que si la suite (u_n) est convergente alors elle converge forcément vers le réel 1.
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - 1 = \dfrac{1 - u_n}{\sqrt{2 - u_n} + 1}$
5. Quel est le maximum de la fonction f définie sur $[0,5;1,3]$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2 - x} + 1}$?
6. En déduire qu'il existe un réel $0 \leq k \leq 1$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - 1| \leq k|u_n - 1|$.
7. Par récurrence prouver que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - 1| \leq k^n |u_0 - 1|$.
8. Démontrer alors la convergence de (u_n) vers le nombre réel 1.

Exercice 31/33 : Pour aller plus loin

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 & = 3 \\ u_{n+1} & = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} v_0 & = 4 \\ v_{n+1} & = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.
2. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - u_n$.
   (a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.
   (b) Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n).
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
4. On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.
   (a) Démontrer que la suite (t_n) est constante.
   (b) En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 32/33 : Suite de Héron (encadrement de $\sqrt{2}$) *

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

.

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
2. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2} \times \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{u_n}$$

   .

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n > \sqrt{2}$.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2} \times \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{\sqrt{2}}$$

   (d) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$u_n - \sqrt{2} \leq \frac{(u_0 - \sqrt{2})^{2^n}}{2\sqrt{2}}$$

(e) Qu'en déduit-on pour la suite (u_n) ?

(f) A l'aide d'un script en Python calculer u_3 et le comparer à $\sqrt{2}$.

Exercice 33/33 : type bac

Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 & = 40 \\ u_{n+1} & = 0,008u_n(200-u_n) \end{cases}$$

Où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2021+n)$.

1. Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2022.
   On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;100]$ par $f(x) = 0,008x(200-x)$.
2. Résoudre dans l'intervalle $[0;100]$ l'équation $f(x) = x$.
3. (a) Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;100]$ et dresser son tableau de variations.
   (b) En remarquant que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$.
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   (d) Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. On considère l'algorithme suivant :

```
def seuil(p):
    n=0
    u=40
    while u<p:
        n=n+1
        u=0.008*u*(200-u)
    return(n+2021)
```

   L'exécution de seuil(100) ne renvoie aucune valeur. Expliquer pourquoi à l'aide de la question 3.