Exercices

Récurrence

Exercice 1/27

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{7u_n}$.
Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 7$.

Exercice 2/27

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 0,8u_n + 0,05$.
Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geq 0,25$.

Exercice 3/27

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{23}{27}$.

Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq \dfrac{23}{18}$.

Exercice 4/27

Soit k un entier strictement positif.

Démontrer par récurrence que : $\forall n \geq k,\ \dfrac{k^n}{n!} \leq \dfrac{k^k}{k!}$.

Exercice 5/27

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$ avec a réel donné tel que $0 < a < 1$.
Montrer par récurrence que $\forall \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$.

Exercice 6/27

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 2$ par $u_n = \dfrac{n-1}{4} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

On pose $S_n = u_2 + u_3 + ... + u_n$.

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a $S_n = 1 - \left(\dfrac{n}{2} + 1\right) \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

Exercice 7/27

Démontrer par récurrence que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}$ et $u_0 = 0$ est strictement croissante.

Exercice 8/27

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - 3$. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n = 3 - 2^n$.

Exercice 9/27

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 10$, on a $2^n \geq 100n$.

Exercice 10/27

Démontrer l'égalité suivante : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 11/27

Démontrer l'égalité suivante : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ avec $q \neq 0$.

Exercice 12/27

Soit une suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 2u_n - 5$. Démontrer que pour tout n, $u_n = 2^n + 5$.

Exercice 13/27

Soit une suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Démontrer que pour tout n, $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$.

Exercice 14/27

Soit une suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \sqrt{0.5u_n + 8}$. Démontrer que pour tout n, $0 \leq u_n \leq 4$.

Exercice 15/27

Démontrer les formules suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Exercice 16/27

Démontrer la proposition suivante : $\forall n \geq 2,\ 5^n \geq 4^n + 3^n$

Exercice 17/27

Démontrer que pour tout n entier naturel, $8^n - 1$ est divisible par 7.

Exercice 18/27 : Récurrence double (hors programme)

Soit une suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_1 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2^n$.

Exercice 19/27

On définit la suite (u_n) par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1$.
Démontrer que pour $n > 0,\ u_n = n^2$

Exercice 20/27

1. Soit une suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel $n,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 3$
   (a) Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$.
   (b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
2. Soit une suite (v_n) définie par $v_0 = 3$ et pour tout entier naturel $n,\ v_{n+1} = \dfrac{1}{3}v_n + 4$.
   (a) Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} \geq v_n$.
   (b) En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

Exercice 21/27

Démontrer que, pour tout entier naturel $n,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Exercice 22/27 : Initialisation

Soit une suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n,\ u_{n+1} = 3u_n - 12$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la proposition : « $u_n = 6$ ».

1. Vérifier que $P(0)$ et $P(1)$ sont fausses.
2. Montrer que $P(n)$ est héréditaire.
3. Que peut-on en conclure ?

Exercice 23/27

1. Démontrer que pour tout entier $n \geq 3,\ (n+1)^2 \geq 2n + 6$.
2. Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N},\ n^2 + n + 2$ est un nombre pair.
3. Démontrer que pour tout réel $x \geq 3,\ (x-1)^2 \geq x + 1$.

Exercice 24/27

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + x - 2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

1. Déterminer $f'(x)$ puis étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Calculer u_1
   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq u_n$. En déduire le sens de variation de (u_n).

Exercice 25/27

Soit une suite (u_n) définie par $u_0 = 0.7$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n}$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x}{1+2x}$.
   (a) Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.
   (b) En déduire que si $x \in [0; 1]$ alors $f(x) \in [0; 1]$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 1$.
3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

Exercice 26/27

1. Soit une suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - 1$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} + 1$.
2. Soit une suite (v_n) définie par $v_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{1+2v_n}{2+v_n}$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq 1$.
3. Soit une suite (w_n) définie par $w_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = \sqrt{1+w_n}$. Démontrer que la suite (w_n) est croissante.
4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $4^n \geq 1 + 3n$.

Exercice 27/27 : Récurrence forte (hors programme)

Montrer que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 possède un diviseur premier.