Exercices

Matrices

Exercice 1/37

Écrire la matrice de format 4×5 telle que les coefficients soient égaux au produit du numéro de leur ligne et du numéro de leur colonne.

Exercice 2/37

Soit A une matrice carrée de format 4 tel que $a_{i,j} = max(i, j)$.

1. Écrire A avec tous ses coefficients.
2. La matrice A est-elle symétrique ?

Exercice 3/37

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A+B$, $2A$, $3B$ et $3A-5B$.

Exercice 4/37

La matrice transposée de la matrice A, notée ${}^tA$, est obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \\ 3 & -9 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

Déterminer ${}^tA$, ${}^tB$ et ${}^tC$. Donner la dimension de chaque matrice.

Exercice 5/37

On appelle trace d'une matrice carrée la somme des éléments de sa diagonale principale. Calculer la trace des matrices carrées suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6/37

Soient A et B deux matrices carrées de format n.

1. Démontrer que $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$.
2. Démontrer que $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$.

Exercice 7/37

Soit a un réel strictement positif et $A = \begin{pmatrix} \ln(a) & \ln(a^3) & \ln(a^{-1}) \\ \ln(a^4) & \ln(a^2) & \ln(a^{-2}) \\ \ln(a) & \ln(a^3) & \ln(a^{-3}) \end{pmatrix}$

Déterminer la matrice B telle que $A = \ln(a) \times B$.

Exercice 8/37

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ -2 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice B telle que $A + B = I_3$.

Exercice 9/37

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ -2 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice B telle que $A + B = O_3$.

Exercice 10/37

Soit A et B les matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha & 4 \\ -2 & 2\alpha \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \beta & 5 \\ 0 & 3\beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer α et β tels que $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer α et β tels que $A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 11/37

Soient les matrices A, B et C définies par $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et

$C = \begin{pmatrix} -4 & -14 & 24 \\ 6 & 7 & 17 \end{pmatrix}$

Déterminer les réels α et β tels que $\alpha A + \beta B = C$.

Exercice 12/37

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Calculer les produits de matrices possibles.

Exercice 13/37

Calculer lorsqu'ils sont définis les produits AB et BA dans les cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 14/37

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.
Calculer AB, BA, AC, CA et ABC.

Exercice 15/37

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
Calculer AB, BA, AC, CA et ABC.

Exercice 16/37

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calculer ${}^tA \cdot A$ et $A \cdot {}^tA$.

Exercice 17/37

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
Calculer AB puis BA.

Exercice 18/37

Calculer le déterminant des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

Exercice 19/37

Déterminer, si elle existe, la matrice inverse de chaque matrice :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} -7 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 20/37

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer la matrice inverse.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$
5. $E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 21/37

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A^2 - 2A$.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 22/37

Dans cet exercice, on se propose de résoudre le système d'équations (S) : $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ en utilisant les matrices.

1. Vérifier que le système (S) s'écrit $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} \text{x} \\ \text{y} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$.
2. Démontrer que $X = A^{-1}B$.
3. Calculer A^{-1} et $A^{-1}B$.
4. En déduire les solutions de (S).

Exercice 23/37

Résoudre, en utilisant la méthode de l'exercice précédent, les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 9x - 4y = 0 \\ 3x + 8y = 7 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 8x - 5y = 0 \\ x + y = 13 \end{cases}$

Exercice 24/37

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 25/37

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Montrer que $A^3 = A + 4I_3$.
3. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 26/37

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 = 3A - 2I_3$.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 27/37

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}01 \\ 0{,}05 & 0{,}99 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer PQ et QP. En déduire la matrice P^{-1} en fonction de Q.
2. Vérifier que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Exercice 28/37

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -7 & 4 & -9 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $Q = P^{-1}$.

2. Montrer qu'il existe une matrice $D = \begin{pmatrix} \text{a} & 0 & 0 \\ 0 & \text{b} & 0 \\ 0 & 0 & \text{c} \end{pmatrix}$ avec a, b et c réels, vérifiant l'égalité : $A = PDQ$
3. Donner l'expression de la matrice D^n en fonction de n, entier naturel.
4. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nQ$.
5. En déduire, pour tout entier naturel n strictement positif, l'expression de A^n.

Exercice 29/37

1. On considère le système $\begin{cases} x + y + z = a \\ 2x + y + 3z = b \\ x - y + 2z = c \end{cases}$ où x, y, z, a, b et c sont des réels.
   Exprimer les réels x, y et z en fonction de a, b et c.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   Montrer que la matrice A est inversible et donner l'expression de A^{-1}.

Exercice 30/37 : Méthode du pivot de Gauss !

Exemple : On cherche la matrice inverse de A (on a bien évidemment vérifié au préalable que celle-ci est inversible à l'aide de son déterminant).
Oui je sais... c'est une matrice carrée d'ordre 2 donc facile pas besoin du pivot blablabla... mais c'est pour vous montrer un exemple simple et bien lisible ;)

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

C'est parti ! on commence par utiliser la notation suivante qui consiste à positionner la matrice A et la matrice I_2 comme vu avec les systèmes linéaires :

$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Puis on cherche à transformer à l'aide du pivot de Gauss la matrice A en la matrice I_2 :

$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$ On commence par un échange de lignes $\left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$ Puis on utilise notre pivot $\left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -2 \end{array}\right)$ On divise notre deuxième ligne par -7 pour obtenir notre deuxième pivot $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right)$ On vient annuler le 5 dans la première ligne $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right)$ et c'est fini ! Notre matrice inverse est $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$
A vous de jouer !

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 31/37

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2, A^3 et A^4.
2. En déduire A^n

Exercice 32/37

Soient les matrices P, P', A et B définies par $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$,
$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

1. Calculer le produit PP'.
2. Démontrer que $P'BP = A$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n strictement positif, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n. \end{pmatrix}$
4. En déduire l'expression de la matrice A^n en fonction de n.

Exercice 33/37

Dans un jardin public, un artiste doit installer une œuvre aquatique commandée par la mairie. Cette œuvre sera constituée de deux bassins A et B ainsi que d'une réserve filtrante R. Au départ, les deux bassins contiennent chacun 100 litres d'eau. Un système de canalisations devra alors permettre de réaliser, toutes les heures et dans cet ordre, les transferts d'eau suivants :

- dans un premier temps, la moitié du bassin A se vide dans la réserve R ;
- ensuite, les trois quarts du bassin B se vident dans le bassin A ;
- Enfin, on rajoute 200 litres d'eau dans le bassin A et 300 litres d'eau dans le bassin B.

Une étude de faisabilité du projet amène à étudier la contenance de deux bassins A et B qui est à prévoir pour éviter tout débordement. On modélise les quantités d'eau des deux bassins A et B à l'aide de deux suites (a_n) et (b_n) : plus précisément pour tout entier naturel n, on note a_n et b_n les quantités d'eau en centaines de litres qui seront respectivement contenues dans les bassins A et B au bout de n heures. On suppose pour cette étude mathématique que les bassins sont a priori suffisamment grands pour qu'il n'y ait pas de débordement.

Pour tout entier naturel n, on note U_n la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Ainsi $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n + C$ où $M = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}75 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}$ et

$C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer P^2. En déduire que la matrice P est inversible et préciser sa matrice inverse.
   (b) Montrer que PMP est une matrice diagonale D que l'on précisera.
   (c) Calculer PDP.
   (d) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $M^n = PD^nP$.

   On admet par la suite que pour tout entier naturel n, $M^n = \begin{pmatrix} 0,5^n & 3 \times 0,5^n - 3 \times 0,25^n \\ 0 & 0,25^n \end{pmatrix}$.

3. Montrer que la matrice $X = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ vérifie $X = MX + C$.
4. Pour tout entier naturel n, on définit la matrice V_n par $V_n = U_n - X$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = MV_n$.
   (b) On admet que, pour tout entier naturel non nul n, $V_n = M^n V_0$. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $U_n = \begin{pmatrix} -18 \times 0,5^n + 9 \times 0,25^n + 10 \\ -3 \times 0,25^n + 4 \end{pmatrix}$.
5. (a) Montrer que la suite (b_n) est croissante majorée. Déterminer sa limite.
   (b) Déterminer la limite de la suite (a_n).
   (c) On admet que la suite (a_n) est croissante. En déduire la contenance des deux bassins A et B qui est à prévoir pour la faisabilité du projet, c'est à dire pour éviter tout débordement.

Exercice 34/37

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit r la rotation de centre O et d'angle θ et h l'homothétie de centre O et de rapport k.

1. Donner les matrices R et H associées aux transformations r et h.
2. Déterminer la matrice de la similitude de centre O, d'angle θ et de rapport k.

Exercice 35/37

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On définit une rotation r d'axe (Ox) et d'angle θ, une homothétie h de centre O et de rapport k.
Soient M le point de coordonnées $(x; y; z)$, M' son image par r et M'' son image par h.

1. Exprimer $\vec{OM''}$ en fonction de $\vec{OM}$, en déduire la matrice H.
2. Sachant que l'abscisse de M est invariante par r, donner la matrice R.
3. En prenant $\theta = \frac{\pi}{4}$, $k = 3$, donner les coordonnées des images par r et par h du point A de coordonnées $(2; -4; \sqrt{2})$.

Exercice 36/37

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et A^4. En déduire l'expression de A^n en fonction de n.
2. (a) Soit $B_n = I_2 + A + \dfrac{1}{2!}A^2 + ... + \dfrac{1}{n!}A^n$.

   On pose $B_n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \gamma_n \\ \beta_n & \delta_n \end{pmatrix}$.

   (b) Montrer que les suites (α_n), (β_n), (γ_n) et (δ_n) ont des limites, que l'on déterminera, lorsque n tend vers $+\infty$.

   On admettra que pour $a \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$ tend vers e^a lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 37/37

Le plan est muni d'un repère orthonormal. On considère la droite Δ d'équation réduite $y = -2x + 1$. L'objectif de l'exercice est de définir par une égalité matricielle la réflexion (symétrie axiale orthogonale).

1. Soit $M(x_M; y_M)$ un point du plan, donner l'équation réduite de la droite Δ_M passant par M et orthogonale à Δ.
2. Calculer les coordonnées du point H intersection des droites Δ et Δ_M en fonction de x_M et y_M.
3. Calculer les coordonnées du point M' image de M par la réflexion d'axe Δ.
4. En déduire une expression matricielle de la réflexion d'axe Δ, et montrer qu'elle est de la forme $Y = AX + B$.