Exercices

Loi des grands nombres

Exercice 1/40

Soit X et Y deux variables aléatoires d'espérances respectives $E(X) = 6$ et $E(Y) = 2$, de variances respectives $V(X) = 2$ et $V(Y) = 0,4$.
Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$ dans chaque cas :

1. $Z = 2X + 3$
2. $Z = 4Y - 2$
3. $Z = -5X + 2$
4. $X + Y$

Exercice 2/40

Un paquet de 10 cartes à jouer contient 5 as, 3 rois et 2 dames. Le tirage d'un as rapporte 5 points, celui d'un roi rapporte 2 points et celui d'une dame coûte 1 point.
On tire simultanément 2 cartes du paquet et on désigne par X le total des points marqués. On suppose que les tirages sont équiprobables.

1. Établir la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance mathématiques, la variance et l'écart type de X.

Exercice 3/40

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par :

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,1	0,2	0,3	0,2	0,15	0,05

1. Calculer l'espérance et la variance de X.
2. Soit $Y = 2X - 3$, calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 4/40

On jette 2 dés à 6 faces parfaitement équilibrés et on note respectivement X_1 et X_2 les variables aléatoires donnant le numéro de la face supérieure du dé 1 et dé 2.
On pose $Y = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.

1. Déterminer $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
2. Déterminer la loi de probabilité de Y.
3. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.
4. Déterminer la loi de probabilité de Z.

5. Calculer $E(z)$ et $V(Z)$.

Exercice 5/40

Soit X la variable aléatoire définie par :
$P(X=0)=(1-p)^2,\ P(X=1)=2p(1-p)$ et $P(X=2)=p^2$
où p est un paramètre réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$.

1. Vérifier que l'on a bien défini une loi de probabilité.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. On pose $Y=-2X+3$. Déterminer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 6/40

Une famille de dauphins est composée de 7 femelles et 5 mâles. On choisit au hasard dans cette famille de 4 dauphins.
Soit X la variable aléatoire associée au nombre de femelles observées dans ce groupe.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 7/40

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres 30 et 0,3 et Y une variable aléatoire qui prend ses valeurs de manière équiprobable dans $[[0,16]]$.

1. Justifier que X et Y ont la même espérance.
2. Calculer la variance de X et de Y.

Exercice 8/40

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ avec $n\in\mathbb{N}$.
Démontrer que $E((X-E(X))^2)=E(X^2)-(E(X))^2$.

Exercice 9/40

Soit X et Y deux variables aléatoires.

1. Démontrer que si X et Y sont indépendantes alors $E(XY)=E(X)E(Y)$.
   Pour toute la suite de l'exercice les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
2. En déduire que $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$.
3. Exprimer $V(X-Y)$ en fonction de $V(X)$ et $V(Y)$.
4. Soit a et b deux réels, exprimer $V(aX+bY)$ en fonction de $V(X)$ et $V(Y)$.

Exercice 10/40

On lance à deux reprises un dé tétraédrique bien équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 4. Notons X et Y les variables aléatoires donnant le numéro de la face cachées respectivement au premier et au deuxième lancer. Calculer la probabilité de l'événement obtenir le 1, puis le 2.

Exercice 11/40

Une urne contient trois jetons rouges marqués « 0 »et deux jetons bleus marqués « 1 ».
On tire au hasard 2 jetons de l'urne.
Soit X la variable aléatoire qui, au premier tirage, associe le numéro du jeton tiré, et Y la variable aléatoire qui au second tirage, associe le numéro du jeton tiré.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = X + Y$ si le tirage du second jeton :

1. se fait avec remise ;
2. se fait sans remise.

Exercice 12/40

Une entreprise fabrique des machines. Soit X la variable aléatoire qui, pour un mois choisi au hasard, associe le nombre de machines vendues pendant cette période.
Une étude statistique permet d'établir la loi de probabilité de X.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	0,04	0,08	0,12	0,28	0,25	0,17	0,06

1. Calculer l'espérance de X
2. La vente d'une machine rapporte 5 000 euros. On note Y la variable aléatoire qui, à un mois tiré au hasard, associe le résultat en euro de l'atelier.
   Déterminer l'espérance de Y, puis l'interpréter.
3. Le résultat mensuel, en euros, du second atelier de l'entreprise définit une variable aléatoire T d'espérance 20 000.
   Quelle est l'espérance du résultat mensuel total de l'entreprise ?

Exercice 13/40

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Deux joueurs A et B disposent d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir face est égale à 0,5.
On désigne par X et Y les va. suivantes :

- X représente le nombre de « face » obtenus par A ;
- Y représente le nombre de « face » obtenus par B.

On définit $Z = X + Y$ et $T = X - Y$

1. Déterminer la loi suivie par les va. X et Y.
2. Déterminer $P(Z = 1)$ et $P(Z = 2n)$
3. Déterminer l'espérance et l'écart-type des v.a. Z et T.

Exercice 14/40

Une étude statistique a été réalisée sur le temps d'attente, en secondes, subi par la clientèle avant d'être prise en communication avec un standardiste.
La variable aléatoire T, qui associe à tout client son temps d'attente, a pour espérance 18 et pour écart-type 7. On estime que la probabilité qu'un client est une attente de plus de 20 secondes est égale à 0,4.

1. Au cours d'une même semaine, un même client passe 5 appels, indépendants les uns des autres. On note X la variable aléatoire exprimant le nombre de fois où, au cours de ces 5

appels, le temps d'attente est supérieur à 20 secondes.
Déterminer l'espérance et l'écart type de X.

2. Dans le but de diminuer le temps d'attente, on effectue une enquête sur un échantillon de 100 clients. Soit Y la variable aléatoire mesurant le temps d'attente moyen exprimé en secondes pour un échantillon de 100 clients.
Déterminer l'espérance et l'écart type de Y.

Exercice 15/40

On suppose que la masse d'un certain type de colis que reçoit une entreprise définit une v.a. d'espérance 300 kg et d'écart-type 50 kg.
On place les colis sur un monte-charge, et on s'intéresse à la masse aléatoire M qui, à un groupe de 25 colis, associe la masse totale de l'ensemble des colis.
On note P_i la v.a. associée à la masse du i-ième colis.

1. Calculer l'espérance de la v.a. M.
2. On suppose que les v.a. P_i sont indépendantes. Déterminer l'écart-type de M.

Exercice 16/40

Un sac contient 6 jetons indiscernables au toucher. Trois d'entre eux portent le numéro 1, les trois autres portent le numéro 2. On extrait successivement et sans remise deux jetons du sac. Soit X et Y les variables aléatoires indiquant respectivement les numéros portés par le premier et le second jeton.

1. Illustrer la situation par un arbre pondéré.
2. Déterminer les lois de probabilités suivies par X et Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 17/40

Considérons l'univers $\Omega = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\}$ et les variables aléatoires X et Y définies sur Ω comme suit :

ω	1	2	3	4	5
$X(\omega)$	0	0	1	1	1

ω	1	2	3	4	5
$Y(\omega)$	1	2	2	2	3

On pose que tous les événements élémentaires définies sur Ω sont équiprobables.

1. Établir la loi de probabilité suivie par chacune des variables aléatoires, ainsi que leur espérance respective.
2. Calculer $E(X+Y)$ en utilisant l'additivité de l'espérance.
3. $E(X-Y)$.
4. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 18/40

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On en tire une poignée (qui pourrait éventuellement être vide). On note X_k la variable aléatoire égale à k si le jeton $n°k$ est tiré et à 0 sinon, et S celle égale à la somme des numéros tirés.

1. Quelle est la loi suivie par X_k ? Calculer son espérance.

2. En déduire $E(S)$ et interpréter ce résultat.

Exercice 19/40

100 bovins se répartissent au hasard et indépendamment les uns des autres, dans trois étables E_1, E_2 et E_3. On suppose que chaque étable peut abriter la totalité du troupeau. Soit X_k la variable aléatoire définie par le nombre d'animaux ayant choisi l'étable E_k.

1. Déterminer la loi de probabilité de ces trois variables.
2. Quelle est la loi suivie par $X_1 + X_2$?
3. Calculer $V(X_1 + X_2)$ et $V(X_1) + V(X_2)$, que peut-on en déduire sur X_1 et X_2 ?

Exercice 20/40

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 10^{-4}.
Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle. Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1% est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85% des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95% des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie. On note :

- M l'événement : « l'animal est porteur de la maladie » ;
- T l'événement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. Un animal est choisi au hasard.
   (a) Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
   (b) Montrer que la probabilité pour que le test soit positif est 0,058.
3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?
4. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
   (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
   (b) Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?
5. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1000 euros. On suppose que le test est gratuit. D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	**0**	**100**	**1000**
Probabilité	0,9405	0,0580	0,0015

Exercice 21/40

Une interrogation écrite sous forme de QCM comporte 5 questions.
Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte : on obtient 1 point si on trouve la bonne réponse, et 0 sinon.
Un élève décide d'y répondre au hasard.

1. On note X_1 le nombre de points que l'élève reçoit à la question 1. Quelle est la loi de X_1 ?
2. On note de même $X_2,\ X_3,\ X_4$ et X_5 le nombre de points obtenus aux questions 2 à 5. On admet que $X_2,\ X_3,\ X_4$ et X_5 sont 2 à 2 indépendantes.
   (a) Quelle loi suit la note obtenue par l'élève ?
   (b) Le professeur multiplie cette note par 4 pour la ramener sur 20 au moment de calculer des moyennes.
   Quelle note sur 20 cet élève peut-il espérer avoir ?

Exercice 22/40

Une maladie très contagieuse touche 23% de la population d'une grande ville. Pour un habitant de cette ville choisi au hasard, on note X la variable aléatoire qui vaut 1 si cet habitant est malade et 0 s'il n'est pas malade.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?
2. On suppose qu'on teste 500 individus pris indépendamment les uns des autres dans cette ville. Celle-ci est suffisamment grande pour que le choix des individus puisse être assimilé à un tirage avec remise.
   Pour i compris entre 1 et 500, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le i-ème habitant testé est malade et 0 s'il n'est pas malade.
   (a) Que représente $S_{500} = X_1 + X_2 + ... + X_{500}$ pour cet échantillon ?
   (b) Quelle est la loi de $S_{500} = X_1 + X_2 + ... + X_{500}$?
   (c) En déduire le nombre moyen d'individus malades auquel on peut s'attendre sur cet échantillon.
3. Simulations : la fonction **randint(a,b)** de la bibliothèque **random** permet de simuler un nombre aléatoire entier compris entre a et b.
   (a) Compléter les lignes 6 et 7 du script ci-après afin qu'il calcule et affiche le nombre moyen d'individus malades sur un échantillon de taille 500.

```
from random import randint
malade=0
for i in range(500) :
    test=randint(1,100)
    if test <= 23 :
        malade+ = ....
print("le nombre de malade est :",....)
```

   (b) Effectuer plusieurs simulations : les résultats sont-ils conformes aux conclusions de la question 2c ?
   (c) Modifier l'algorithme pour qu'il calcule la fréquence de malades sur cet échantillon de taille 500.
   (d) Modifier l'algorithme pour qu'il calcule la fréquence de malades sur un échantillon de taille 5000 obtenu sous les mêmes hypothèses. Que remarquez-vous ?

Exercice 23/40

Exprimer sous la forme $|X - m| \geq \lambda$ ou $|X - m \leq \lambda|$, les expressions suivantes :

1. $(X - 3 \geq 2$ ou $X - 3 \leq -2)$.
2. $(X + 1 \geq 5$ ou $X + 1 \leq -5)$.
3. $(X \geq 6$ ou $X \leq -2)$.
4. $(-5 \leq X - 2 \leq 5)$.
5. La distance entre X et 6 est supérieure ou égale à 3.
6. La distance entre X et -3 est supérieure ou égale à 4.
7. $(X - 1)^2 \geq 4$
8. $(X + 3)^2 \geq 25$
9. $(-1 \leq X \leq 5)$
10. $(0 \leq X \leq 3)$

Exercice 24/40

Exprimer sans valeur absolue les expressions suivantes :

1. $|X - 4| \leq 2$
2. $|X + 2| \leq 5$
3. $|X - 3| \geq 2$
4. $|X + 1| \geq 4$

Exercice 25/40

Soit X une variable aléatoire. Déterminer l'événement contraire de chacun des événements suivants :

1. $(|X - 3| < 0,3)$
2. $(|X + 3| \leq 0,1)$
3. $(|X - 2| > 1)$
4. $(|X + 1| \geq 0,3)$
5. $(|X + 0,3| \geq 0,01)$
6. $(|X - 0,8| \leq 0,9999)$

Exercice 26/40

Soit X une variable aléatoire d'espérance 20 et de variance 25.
A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, estimer la probabilité d'avoir $|X - 20| \geq 10$.

Exercice 27/40

Soit X une variable aléatoire d'espérance et de variance toutes deux égales à 20.
Que peut-on dire de $P(0 < X < 40)$?

Exercice 28/40

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et d'écart type σ.

1. Donner une majoration des probabilités suivantes :
   (a) $P(|X - E(X)| \geq \sigma)$
   (b) $P(|X - E(X)| \geq 2\sigma)$
   (c) $P(|X - E(X)| \geq 3\sigma)$
2. En déduire une minoration des probabilités suivantes :

(a) $P(-\sigma < X - E(X) < \sigma)$
(b) $P(-2\sigma < X - E(X) < 2\sigma)$
(c) $P(-3\sigma < X - E(X) < 3\sigma)$

Exercice 29/40

La moyenne du nombre d'absences d'un élève est de 5 absences par mois. Si on pose la variable aléatoire correspondant au nombre d'absences par mois pour cet élève, que peut-on dire de la probabilité que ce nombre d'absences soit supérieur à 15 absences par mois.

Exercice 30/40

Durant une année de troisième, un élève a une moyenne de 13 aux devoirs surveillés de mathématiques avec une variance de 2,3. Majorer la probabilité pour cet élève d'avoir une note inférieure ou égale à 10 ou une note supérieure ou égale à 16 au prochain devoir surveillé.

Exercice 31/40

On lance un dé équilibré n fois, soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de fois où le chiffre obtenu est pair.

1. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité que la proportion de nombre pair obtenu s'écarte de 0,02 ou plus de $E(X)$.
2. Donner le nombre de lancers minimum à effectuer afin que cette probabilité soit inférieure ou égale à 3%.

Exercice 32/40

Soit une urne contenant 3 jetons rouges et 7 jetons verts. On veut connaître la probabilité d'obtenir au moins 5 jetons rouges au terme de 20 tirages avec remise. Si on effectue une simulation de 50 000 épreuves de 20 tirages et que l'on obtient une proportion p = 0,7864, déterminer la probabilité de faire une erreur de plus d'un centième sachant que la variance est de 1,8.

Exercice 33/40

On lance 3 600 fois une pièce de monnaie non truquée.
Soit X la variable aléatoire qui associe à cette expérience le nombre de pile obtenus.

1. Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à la variable X.
2. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions de pile soit strictement compris entre 1 600 et 2 000

Exercice 34/40

On effectue n tirage successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. On note X la variable aléatoire qui, à un tirage donné, associe 1 si la boule tirée est rouge, et 0 sinon, et M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de X.

1. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$, puis écrire l'inégalité de concentration relative à M_n.
2. A partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera strictement comprise entre 0,35 et 0,45 ?

Exercice 35/40

20% des habitants d'un pays sont atteints par un virus C.
1000 personnes rentrent dans une salle de spectacle.
La population du pays est suffisamment importante pour assimiler l'entrée de chaque personne à un tirage aléatoire avec remise.
Soit S la variable aléatoire comptant le nombre de personnes malades obtenus sur les 1000 personnes.
Montrer à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que : $p(174 < S < 226) \geq 0,76$,
Calculer directement $p(174 < S < 226)$ et vérifier le résultat précédent.
L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est-elle optimale ?

Exercice 36/40 : Type bac

Lors d'un salon dartisanat, un artisan ne vend que deux produits :

- Le produit A au prix unitaire de 8 euros ;
- Le produit B au prix unitaire de 12 euros.

On suppose que les quantités achetées par les clients sont indépendantes.
Le nombre de produits achetés par une personne s'arrêtant au stand de cet artisan est modélisé :

- Pour le produit A par une va. X d'espérance 2 et variance 2 ;
- pour le produit B par une v.a. Y d'espérance 1 et variance 1.

1. Soit Z la v.a. égale au montant en euros de l'achat d'une personne s'arrêtant au stand. Calculer l'espérance et la variance de Z.
2. On a remarqué que 350 personnes s'arrêtaient au stand chaque jour. Soit C la variable aléatoire qui, à une journée donnée, associe le chiffre d'affaires de l'artisan.
   (a) Déterminer l'espérance et la variance de C.
   (b) En utilisant l'inégalité de Bienaumé-Tchebichev, déterminer un minorant de la probabilité que le chiffre d'affaires soit strictement compris entre 9 000 et 10 600 euros.

Exercice 37/40 : QCM

1. X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de variances respectives 4 et 9. L'écart type de la variable aléatoire $Z = X + Y$ est égal à :

   (a) 13 (b) $\sqrt{13}$ (c) 5 (d) $\sqrt{97}$

2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires de même loi donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	-2	-1	2	5
$P(X = x_i)$	0,2	0,5	0,2	0,1

   On suppose X_1 et X_2 indépendantes.
   Soit la variable aléatoire $Y = X_1 + X_2$. Alors $P(Y = 4)$ est égal à :

   (a) 0,04 (b) 0,09 (c) 0,10 (d) 0,14

3. Soit X une variable aléatoire d'espérance 150 et d'écart-type 20. On note S la variable aléatoire somme d'un échantillon de taille 100 de X. On a :

   (a) $E(S) = 15\ 000$ (c) $V(S) =$40 000
   (b) $E(S) = 150$ (d) $\sigma(S) = 20$

4. Soit X une variable aléatoire d'espérance 100 et de variance 10. On note M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de X. La plus petite valeur de l'entier n telle que $\sigma(M_n) < 0,3$ est :

   (a) 34
   (b) 111
   (c) 112
   (d) 1 112

5. Soit V et n deux nombres entiers naturels non nuls, et M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire d'espérance 0 et de variance V.
   Pour quelles valeurs de V et n a-t-on $P(|M_n| < 3) \geq \dfrac{1}{18}$?

   (a) Aucune
   (b) $V = 2$ et $n = 1$
   (c) $V = 1$ et $n = 2$
   (d) $V = 18$ et $n = 36$

6. X est une variable aléatoire d'espérance 0 et d'écart-type 1. Pour tout réel strictement positif a, on a :

   (a) $P(|X| < a) \leq \dfrac{1}{a^2}$
   (b) $P(|X| < a) \geq \dfrac{1}{a^2}$
   (c) $P(|X| < a) \leq \dfrac{a^2-1}{a^2}$
   (d) $P(|X| < a) \geq \dfrac{a^2-1}{a^2}$

Exercice 38/40

La directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude, pour analyser la façon dont ils pensent avoir réussi cet examen.

Pour cette étude, on demande aux étudiants à l'issue de l'examen de répondre individuellement à la question : « Pensez-vous avoir réussi l'examen ? ».

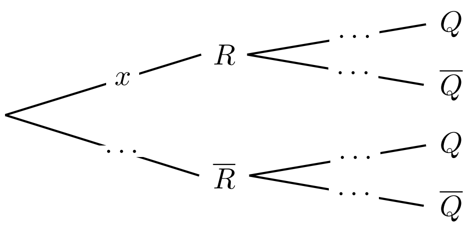
Seules les réponses « oui » ou « non » sont possibles, et on observe que 91,7 % des étudiants interrogés ont répondu « oui ».
Suite à la publication des résultats à l'examen, on découvre que :

- 65 % des étudiants ayant échoué ont répondu « non » ;
- 98 % des étudiants ayant réussi ont répondu « oui ».

On interroge au hasard un étudiant qui a passé l'examen.
On note R l'évènement « l'étudiant a réussi l'examen » et Q l'évènement « l'étudiant a répondu « oui » à la question ».
Pour un évènement A quelconque, on note $P(A)$ sa probabilité et $\overline{A}$ son évènement contraire.

Dans tout l'exercice, les probabilités sont, si besoin, arrondies à 10^{-3} près.

1. Préciser les valeurs des probabilités $P(Q)$ et $P_{\overline{R}}\left(\overline{Q}\right)$.
2. On note x la probabilité que l'étudiant interrogé ait réussi l'examen.
   (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



   (b) Montrer que $x = 0,9$.

3. L'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question.
   Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen ?
4. La note obtenue par un étudiant interrogé au hasard est un nombre entier entre 0 et 20 . On suppose qu'elle est modélisée par une variable aléatoire N qui suit la loi binomiale de paramètres $(20\ ;\ 0,615)$.

   La directrice souhaite attribuer une récompense aux étudiants ayant obtenu les meilleurs résultats.

   À partir de quelle note doit-elle attribuer les récompenses pour que 65 % des étudiants soient récompensés ?
5. On interroge au hasard dix étudiants.

   Les variables aléatoires $N_1, N_2, \ldots, N_{10}$ modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres $(20\ ;\ 0,615)$.
   Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + \cdots + N_{10}$.
   Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable aléatoire S.
6. On considère la variable aléatoire $M = \dfrac{S}{10}$.
   (a) Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice ?
   (b) Justifier que $E(M) = 12,3$ et $V(M) = 0,47355$.
   (c) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation ci-dessous.

   « La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 % ».

Exercice 39/40

Suite à une étude statistique réalisée dans la station-service Carbuplus, on évalue à $0,25$ la probabilité qu'un client venant alimenter son véhicule en carburant passe moins de 12 minutes dans la station avant de la quitter.
On choisit au hasard et de façon indépendante 10 clients de la station et on assimile ce choix à un tirage avec remise. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 10 clients associe le nombre de ces clients ayant passé moins de 12 minutes à la station.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins 4 clients dans un échantillon de 10 passent moins de 12 minutes à la station ? On arrondira si besoin le résultat à 10^{-3} près.
3. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Un client arrive à la station et se dirige vers une pompe. Il constate que deux voitures sont devant lui, la première accédant à la pompe au moment de son arrivée.
On désigne par T_1, T_2, T_3 les variables aléatoires qui modélisent les temps passés en minute par chacun des trois clients, dans leur ordre d'arrivée, pour alimenter son véhicule entre l'instant où la pompe est disponible pour lui et celui où il la libère.
On suppose que T_1, T_2, T_3 sont des variables aléatoires indépendantes de même espérance égale à 6 et de même variance égale à 1.
On note S la variable aléatoire correspondant au temps d'attente total passé à la station du troisième client entre son arrivée à la station et son départ de la pompe après avoir alimenté son véhicule.

1. Exprimer S en fonction de T_1, T_2 et T_3.

2. (a) Déterminer l'espérance de S et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
   (b) Quelle est la variance du temps d'attente total S de ce troisième client ?
3. Montrer que la probabilité que le troisième client passe un temps strictement compris entre 14 et 22 minutes à la station est supérieure ou égale à $0,81$.

Exercice 40/40

Les parties A et B sont indépendantes.

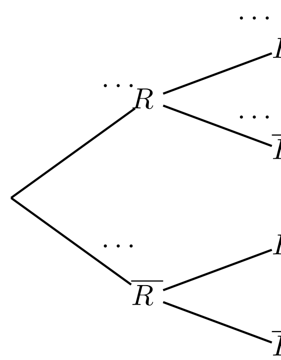
Partie A

Une société de vente en ligne procède à une étude du niveau de fidélité de ses clients. Elle définit pour cela comme « régulier » un client qui a fait des achats chaque année depuis trois ans.
Elle constate que 60 % de ses clients sont des clients réguliers, et que parmi eux, 47 % ont acheté la carte de fidélité.
Par ailleurs, parmi l'ensemble de tous les clients de la société, 38 % ont acheté la carte de fidélité.
On interroge au hasard un client et on considère les évènements suivants :

- R : « le client est un client régulier » ;
- F : « le client a acheté la carte de fidélité ».

Pour un évènement E quelconque, on note $\overline{E}$ son évènement contraire et $P(E)$ sa probabilité.

1. (a) Reproduire l'arbre ci-contre et compléter les pointillés.
   (b) Calculer la probabilité que le client interrogé soit un client régulier et qu'il ait acheté la carte de fidélité.
   (c) Déterminer la probabilité que le client ait acheté la carte de fidélité sachant que ce n'est pas un client régulier.
   (d) Le directeur du service des ventes affirme que parmi les clients qui ont acheté la carte de fidélité, plus de 80 % sont des clients réguliers.
   Cette affirmation est-elle exacte ? Justifier.



2. On choisit un échantillon de 20 clients de la société sélectionnés de manière indépendante. On suppose que ce choix s'assimile à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 20 clients associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux. On rappelle que $P(F) = 0,38$.
   Les valeurs des probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3} près.
   (a) Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ? Justifier.
   (b) Déterminer la probabilité qu'au moins 5 clients aient acheté la carte de fidélité dans un échantillon de 20.

Partie B

La société demande à un institut de sondage de faire une enquête sur le profil de ses clients réguliers. L'institut a élaboré un questionnaire en ligne constitué d'un nombre variable de questions.
On choisit au hasard un échantillon de 1000 clients réguliers, à qui le questionnaire est proposé. On considère que ces 1000 clients répondent.

- Pour les remercier, la société offre un bon d'achat à chacun des clients de l'échantillon. Le montant de ce bon d'achat dépend du nombre de questions posées au client.

- La société souhaite récompenser particulièrement les clients de l'échantillon qui ont acheté une carte de fidélité et, en plus du bon d'achat, offre à chacun d'eux une prime d'un montant de 50 euros versée sur la carte de fidélité.

On note Y_1 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1000 clients réguliers, associe le total, en euros, des montants du bon d'achat des 1000 clients.
On admet que son espérance $E(Y_1)$ est égale à 30000 et que sa variance $V(Y_1)$ est égale à 100000.
On note X_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1000 clients réguliers, associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux, et on note Y_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1000 clients, associe le total, en euros, des montants de la prime de fidélité versée.
On admet que X_2 suit la loi binomiale de paramètres 1000 et 0,47 et que $Y_2 = 50X_2$.

1. Calculer l'espérance $E(X_2)$ de la variable X_2 et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

On note $Y = Y_1 + Y_2$ la variable aléatoire égale au total général, en euros, des montants offerts (bon d'achat et prime de fidélité) aux 1000 clients. On admet que les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes.
On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y}{1000}$.

2. Préciser ce que modélise la variable Z dans le contexte de l'exercice.
   Vérifier que son espérance $E(Z)$ est égale à $53,5$ et que sa variance $V(Z)$ est égale à 0,72275.
3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, vérifier que la probabilité que Z soit strictement compris entre $51,7$ euros et $55,3$ euros est supérieure à $0,75$.