Exercices

Loi binomiale

Exercice 1/30

On dispose de 3 dés - un rouge, un vert, un bleu - indiscernables au toucher. Les expériences suivantes peuvent-elles être modélisées par une épreuve de Bernoulli ? Si oui, préciser son paramètre p, probabilité de succès.

1. *Expérience 1* : les dés sont placés dans une urne.
   On en tire un au hasard et on note sa couleur.
2. *Expérience 2* : les dés sont placés dans une urne.
   On en tire au hasard. On gagne deux euros s'il est rouge.
   On perd un euro s'il est d'une autre couleur.
3. *Expérience 3* : on lance les 3 dés et on note la somme des chiffres obtenus.
   On gagne le nombre de points marqués.
4. *Expérience 4* : on lance les 3 dés et on note le produit des chiffres obtenus.
   On gagne s'il est égal à 4.
5. *Expérience 5* : on lance les dés vert et rouge. On gagne un euro si le numéro du dé vert est supérieur à celui du dés rouge, 3 euros si les numéros sont identiques, et on perd 2 euros dans les autres cas.

Exercice 2/30

On estime que 2% des êtres humains sont gauchers, calculer la probabilité que parmi 100 personnes, 5 soient gauchères.

Exercice 3/30

Un escargot descend le long d'un grillage. A chaque épissure, il prend la maille de droite une fois sur trois, celle de gauche deux fois sur trois. Il descend ainsi dix niveaux.

1. Quelle est la probabilité que l'escargot ait pris quatre fois la maille de droite ?
2. Quelle est la probabilité que l'escargot ait pris quatre fois la maille de gauche ?

Exercice 4/30

Un concours consiste à passer 3 épreuves indépendantes :

- Épreuve 1 : on a 70% de chances de réussir au vu des dernières années ;
- Épreuve 2 : on a 55% de chances de réussir au vu des dernières années ;
- Épreuve 3 : on a 35% de chances de réussir au vu des dernières années ;

On est reçu au concours si on réussit au moins deux épreuves sur les trois.
Quelle est la probabilité de réussir le concours ?

Exercice 5/30

Dans une population donnée, 56% des familles occupent une maison individuelle. Parmi elles, 78% en sont propriétaires.
Parmi les familles n'occupant pas une maison individuelle, 24% sont propriétaire de leur logement.

1. On choisit une famille au hasard dans la population considérée.
   Démontrer que la probabilité pour qu'elle soit propriétaire de son logement est égale à 0,5424.
2. On interroge cinq familles au hasard dans la population considérée. On suppose que les choix successifs sont indépendants.
   Soit X la variable aléatoire, qui à tout prélèvement, associe le nombre de famille propriétaires du logement.
   (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
   (b) Donner l'expression de $P(X = k)$ en fonction de k.
   (c) Calculer $P(X = k)$ pour $0 \leq k \leq 5$, arrondir les résultats à 10^{-4}.
   (d) Calculer $E(X)$ et $V(X)$ par deux méthodes.

Exercice 6/30

Une urne contient une boule rouge, deux boules blanches et trois boules noires. On extrait successivement six boules de cette urne, en remettant après chaque tirage la boule extraite dans l'urne. On suppose tous les tirages équiprobables.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 boules blanches ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 3 boules blanches ?
3. Combien peut-on espérer obtenir de boules blanches en moyenne ?

Exercice 7/30

On lance deux dés bien équilibrés. On gagne si la somme des points obtenus est égale à 7.

1. Démontrer, à l'aide d'un tableau à double entrée, que la probabilité de gagner est $\dfrac{1}{6}$.
2. On répète 5 fois de suite cette expérience et on suppose que les jets sont indépendants.
   (a) Justifier que le nombre de succès suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   (b) Calculer la probabilité de gagner exactement deux fois.
   (c) Calculer la probabilité de gagner au plus deux fois.
   (d) Calculer la probabilité de gagner au moins trois fois.

Exercice 8/30

On considère une urne contenant 5 boules rouges et 7 boules noires.

1. On tire simultanément 2 boules de l'urne, on admet que tous les tirages sont équiprobables.
   Calculer la probabilité des événements suivants :
   (a) on a tiré 2 boules rouges ;
   (b) on a tiré 2 boules de même couleur.
2. On répète 6 fois l'épreuve qui consiste à tirer simultanément 2 boules de l'urne, en remettant les boules dans l'urne après tirage (les épreuves successives sont donc indépendantes).

On considère comme un succès le tirage de 2 boules rouges à une épreuve.
Soit X la variable aléatoire, qui à tout prélèvement, associe le nombre de succès obtenus au cours des 6 épreuves.

(a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

(b) Déterminer l'espérance mathématique et la variance de X.

(c) Calculer la probabilité d'obtenir exactement 4 succès.

Exercice 9/30

Dans tout l'exercice, on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
Une urne contient trois boules noires et une boule blanche. On considère l'expérience suivante : On lance un jeton parfaitement équilibré, présentant une face noire et une face blanche. Si le jeton tombe sur la face blanche, on ajoute une boule blanche dans l'urne ; si le jeton tombe sur la face noire, on ajoute une boule noire dans l'urne.
Puis on tire simultanément et au hasard, trois boules de l'urne.

1. On appelle E_0 l'événement : « Aucune boule blanche ne figure parmi les trois boules tirées ». et B l'événement :« Le jeton est tombé sur la face blanche ».
   (a) Calculer $P(E_0 \cap B)$, $P(E_0 \cap \overline{B})$ puis $P(E_0)$.
   (b) On tire trois boules de l'urne, aucune boule blanche ne figure dans ce tirage. Quelle est la probabilité que le jeton soit tombé sur la face noire ?
2. On appelle E_1 l'événement : « Une boule blanche et une seule figure parmi les trois boules tirées » et B l'événement :« Le jeton est tombé sur la face blanche ».
   (a) Calculer la probabilité de l'événement E_1.
   (b) On effectue successivement quatre fois l'expérience décrite au début, qui consiste à lancer le jeton, puis à tirer les trois boules de l'urne.
   Quelle est la probabilité d'obtenir, au moins une fois, une et une seule boule blanche ?

Exercice 10/30

Une boîte de chocolats contient 10 chocolats au lait et 5 chocolats noirs. 15 convives prennent au hasard un chocolat et font passer la boîte.

1. Calculer la probabilité de l'événement A : « le 10-ième convive prend le dernier chocolat noir ».
2. Quelle est la probabilité de l'événement D : « les chocolats noirs ont été terminés avant les chocolats au lait » ?

Exercice 11/30

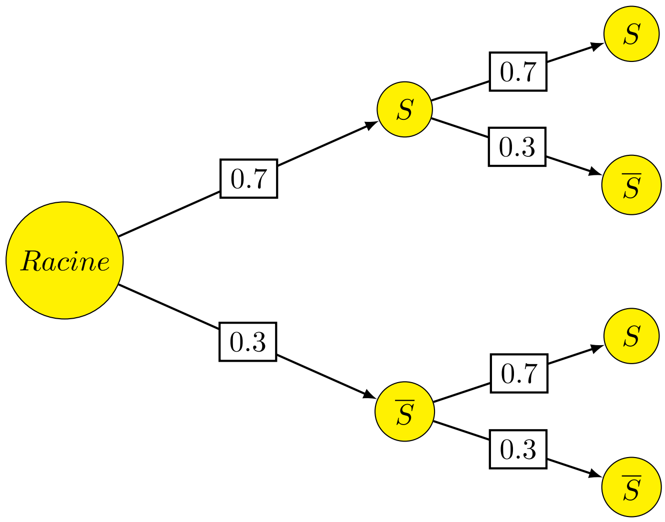
Dans une maternité, on observe n naissances, n entier strictement positif.
On admet que dans cette maternité la probabilité qu'un nouveau né soit une fille est de 0,49. Les naissances sont supposées indépendantes.

1. Combien de naissances faut-il attendre pour que la probabilité qu'il naisse au moins une fille soit supérieure à 0,95 ?
2. Combien de naissances faut-il attendre pour que la probabilité qu'il naisse au moins deux filles soit supérieure à 0,95 ?

Exercice 12/30

L'arbre ci-contre représente un schéma de n épreuves de Bernouilli de succès S et de paramètre p. Entoure la bonne réponse.

1. $n = 4$ et $p = 0.3$.
2. $n = 4$ et $p = 0.7$.
3. $n = 2$ et $p = 0.3$.
4. $n = 2$ et $p = 0.7$.



Exercice 13/30

Dans un club de loisirs, différentes activités de découverte sont proposées dont le tennis et le golf. Sur les 48 adhérents, on compte 12 inscriptions pour le tennis et 16 pour le golf, 4 adhérents étant inscrits à la fois en tennis et en golf.
On sort au hasard la fiche d'un adhérent. On désigne par :

- T l'événement « l'adhérent est inscrit en découverte tennis »
- G l'événement « l'adhérent est inscrit en découverte golf »

Les événements T et G sont-ils indépendants ?

Exercice 14/30

Dans une urne, on dispose de 3 boules bleues et 5 boules rouges. On organise alors un jeu dont les règles sont les suivantes : on tire au hasard une boule de l'urne.

- Si la boule est bleue, la boule est remise dans l'urne, le joueur gagne 1 point et rejoue :
  - si la boule tirée est bleue, le joueur gagne 2 points
  - sinon il gagne 1 point.
- Si la boule est rouge, on la remet dans l'urne, le joueur ne gagne ni ne perd aucun point et rejoue :
  - si la boule tirée est bleue, le joueur gagne 1 point
  - sinon il gagne 2 points.

Quel est le gain moyen à ce jeu ?

Exercice 15/30

On lance cinq fois un dé non pipé, quelle est la probabilité que le chiffre 6 apparaisse exactement trois fois ?

Exercice 16/30

Dans le cadre d'un entraînement d'un club de football, Alexis s'exerce aux tirs au but. Combien doit-il effectuer de tentatives pour que la probabilité de marquer au moins un but soit au moins égale à 0,9, sachant qu'à chaque tir il marque 3 fois sur 5 ?

Exercice 17/30

Un élève prend le bus pour aller au lycée.
Chaque matin, il a deux chances sur trois d'attendre moins de 5min.
On appelle S l'événement : « l'élève attend son bus moins de 5 minutes ».

1. Dessine l'arbre qui représente la situation.
2. L'élève doit prendre le bus trois matins consécutifs. Dessiner l'arbre pondéré qui représente la situation.
3. Calculer la probabilité qu'il attende son bus moins de 5 minutes une seule fois sur les trois jours.

Exercice 18/30

Sans calculatrice, entourer les affirmations vraies et corriger les autres.

1. $\binom{15}{1} = 14$
2. $\binom{9}{8} = \binom{9}{1}$
3. $\binom{16}{5} - \binom{15}{5} = \binom{15}{4}$

Exercice 19/30

1. Déterminer les coefficients binomiaux suivants : $\binom{8}{0}$; $\binom{8}{1}$; $\binom{8}{8}$; $\binom{8}{7}$
2. On donne $\binom{8}{2} = 28$. En déduire : $\binom{8}{6}$ et $\binom{9}{2}$

Exercice 20/30

1. La duchesse d'Aquitaine et la duchesse de Bretagne attendent chacune l'héritier de leur duché. Calculer la probabilité de pouvoir faire une alliance en mariant les deux enfants attendus.
2. Étudier l'indépendance 2 à 2 des événements suivants :
   - A : « l'héritier d'Aquitaine est un garçon ».
   - B : « l'héritier de Bretagne est un garçon ».
   - C : « les deux héritiers sont de même sexe ».
3. A-t-on : $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$?

Exercice 21/30 : *

Xavier dispose d'un dé cubique, bien équilibré. Yoann dispose d'un dé tétraédrique pipé dont le lancer est modélisé par la loi suivante :

k	1	2	3	4
$P(\{k\})$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{10}{20}$

Les deux dés sont lancés de façon indépendante. On désigne par X et Y les numéros respectivement amenés par le dé cubique et le dé tétraédrique. Yoann est déclaré gagnant s'il obtient un numéro strictement supérieur à celui de Xavier.

1. (a) Calculer la probabilité des événements suivants : $\{X = 2\} \cap \{Y = 3\}$, $\{X = Y\}$ et $\{X < Y\}$.
   (b) Qui, de Xavier ou de Yoann, a le plus de chances de gagner à ce jeu ?
2. On définit la variable aléatoire $S = X + Y$, qui correspond à la somme des numéros obtenus par les deux joueurs.
   (a) Déterminer la loi de S.
   (b) Quelle somme peut-on espérer obtenir à ce jeu, en moyenne ?
   (c) Calculer les espérances de X et de Y. L'espérance de la somme de X et Y est-elle égale à la somme de leurs espérances ?

Exercice 22/30

Un avion possède deux moteurs identiques : la probabilité que chacun d'eux tombe en panne est de 0,001. On suppose que la panne d'un moteur n'a aucune influence sur la panne de l'autre moteur.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que les deux moteurs tombent en panne.
3. Calculer la probabilité qu'un seul moteur tombe en panne.

Exercice 23/30

Un tournoi de tennis se déroule par élimination directe. On peut jouer au maximum trois parties (si l'on va en finale). A chaque rencontre, Noé a une probabilité de gagner égale à 0,4.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties jouées par Noé.

1. Déterminer la loi de probabilité suivie par X.
2. Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.

Exercice 24/30

Un constructeur de composants produit des résistances. On admet que la probabilité qu'une résistance soit défectueuse est 0,005. Dans un lot de 1000 résistances, quelle est la probabilité d'avoir :

1. Au moins une résistance défectueuse ?
2. Exactement deux résistances défectueuses ?
3. Au plus deux résistances défectueuses ?
4. Au moins deux résistances défectueuses ?

Exercice 25/30 : Problème du chevalier de Méré

Les dés étant supposés non pipés, on considère les événements suivants :

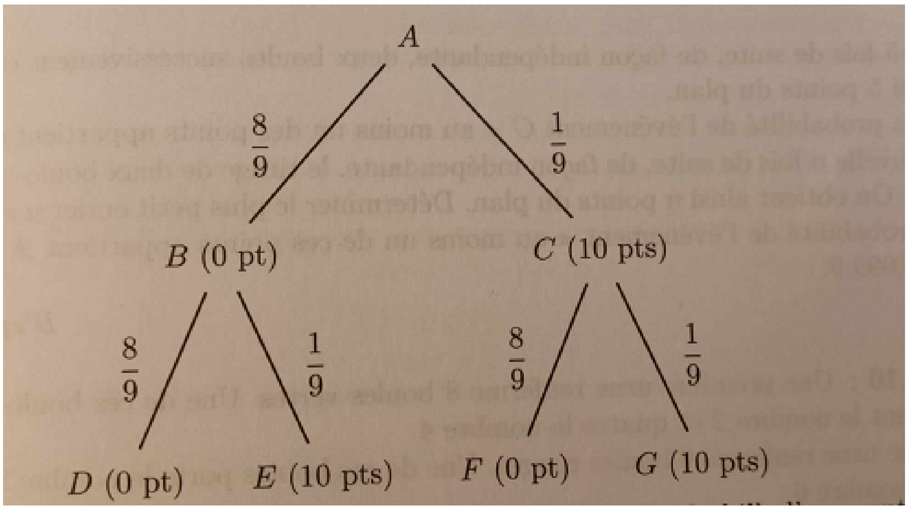
- A : « Obtenir au moins un 6 en lançant quatre fois le dé ».
- B : « Obtenir au moins un double 6 en lançant vingt-quatre fois deux dés ».

Les dés utilisés sont cubiques, les faces étant numérotées de 1 à 6, non pipés. Pensez-vous, comme le chevalier de Méré (noble de la cour de Louis XIV), que les événements A et B sont équiprobable ?
Cet exercice a été présenté à Blaise Pascal. Selon une lettre de Pascal à Fermat (datant du

29/07/1654), il “ avait très bon esprit, mais n’était pas géomètre ”.

Exercice 26/30

Un joueur lance une bille qui part de A, puis emprunte obligatoirement une des branches indiquées sur l’arbre ci-dessous pour arriver à l’un des points D, E, F et G.



On a marqué sur chaque branche de l’arbre la probabilité pour que la bille l’emprunte après être passée par un nœud.
Les nombres entre parenthèses indiquent les points gagnés par le joueur lors du passage de la bille.
On note X la variable aléatoire qui correspond au nombre total de points gagnés à l’issue d’une partie, c’est-à-dire une fois la bille arrivée en D, E, F ou G.

1. Dans cette question, les résultats sont attendus sous forme fractionnaire.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) Calculer l’espérance de X.
2. Le joueur effectue huit parties et on suppose que ces huit parties sont indépendantes.
   On considère qu’une partie est gagnée si le joueur obtient 20 points à cette partie.
   (a) Calculer la probabilité qu’il gagne exactement 2 parties. On donnera le résultat arrondi au millième.
   (b) Calculer la probabilité qu’il gagne au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.

Exercice 27/30 : Vrai ou faux

1. Indépendance et incompatibilité sont deux notions équivalentes.
2. Considérons un jeu de 32 cartes et les épreuves ε_1 « je prends une carte du paquet et la garde », et ε_2 « je prends une carte du paquet ». Ces deux épreuves successives ne sont pas indépendantes.
3. Si X suit une loi binomiale $B(n;p)$, alors la variable aléatoire $\dfrac{X}{n}$ suit aussi une loi binomiale.
4. Il n’existe qu’une seule variable aléatoire suivant la loi binomiale $B(n;p)$.
5. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots\ldots + \binom{n}{n} = 2^n$
6. Deux épreuves aléatoires identiques sont nécessairement indépendantes.

7. Si deux événements non impossibles A et B ne sont pas indépendants, on ne peut pas calculer $P(A \cap B)$.
8. $(0,1) \in \{1;2\} \times \{0;1;2\}$.
9. Si on lance deux fois une pièce de monnaie, alors $P(\{Pile\} \times \{Face\}) = \frac{1}{4}$
10. Si A_1 et A_2 sont deux événements appartenant respectivement aux épreuves ε_1 et ε_2, alors $A_1 \times A_2 = A_1 \cap A_2$.

Exercice 28/30 : *

Un sac contient trois boules numérotées respectivement 0, 1 et 2, indiscernables au toucher.
On tire une boule du sac, on note son numéro x et on la remet dans le sac ; puis on tire une seconde boule, on note son numéro y et on la remet dans le sac.
Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.
A chaque tirage de deux boules, on associe dans le plan, muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, le point M de coordonnées $(x; y)$.
On désigne par D le disque de centre O et de rayon 1,7.
Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. Placer dans un plan muni du repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les points correspondant aux différents résultats possibles.
2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   - A : « Le point M est sur l'axe des abscisses » ;
   - B : « Le point M appartient au cercle de centre 0 et de rayon 1 » ;
3. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe la somme $x^2 + y^2$.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   Calculer son espérance mathématique $E(X)$.
   (b) Montrer que la probabilité de l'événement « Le point M appartient au disque D » est égale à $\frac{4}{9}$.
4. On tire 5 fois de suite, de façon indépendante, deux boules successivement et avec remise. On obtient ainsi 5 points du plan.
   Quelle est la probabilité de l'événement C « au moins un des points appartient au disque D » ?
5. On renouvelle n fois de suite, de façon indépendante, le tirage de deux boules successivement et avec remise . On obtient ainsi n points du plan. Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'événement « au moins un de ces points appartient à D » soit supérieure ou égale à 0,9999.

Exercice 29/30

Une première urne renferme 8 boules vertes. Une de ces boules porte le numéro 1, trois portent le numéro 2 et quatre le numéro 4.
Une deuxième urne renferme 6 boules rouges. Une de ces boules porte le numéro 3, deux le numéro 5 et trois le numéro 6.

1. On extrait au hasard une boule de chaque urne. On désigne par X le nombre porté par la boule verte et par Y le nombre porté par la boule rouge.
   (a) Calculer la probabilité de l'événement $\{X = 2\} \cap \{Y = 6\}$.
   (b) Montrer que la probabilité de l'événement $\{X + Y \geq 8\}$ est égale à $P = \frac{29}{48}$.

2. On appelle A l'événement $\{X+Y \geq 8\}$. On effectue dix fois de suite le tirage décrit en 1., en replaçant les boules extraites dans leur urne respective avant chaque nouveau tirage. Les tirages sont indépendants.
   On désigne par Z la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de réalisations de l'événement A au cours de ces dix épreuves.
   Déterminer la probabilité de l'événement $\{Z = 5\}$. On donnera le résultat sous forme décimale à 10^{-3} près.

Exercice 30/30 : *

1. Soit n un entier naturel non nul et soit a et b deux nombres réels non tous les deux nuls, on considère la variable aléatoire Y suivant la loi binomiale $B(n; \dfrac{a}{a+b})$. Exploiter la somme $P(Y=0)+P(Y=1)+....+P(Y=n)$ pour montrer que :
   $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$
   Il s'agit de la formule du binôme de Newton appliquée à des nombres positifs.
2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B(n;p)$. Notre objectif est le calcul de $E(X)$.
   (a) k étant un entier naturel non nul inférieur à n, montrer que $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$.
   (b) Montrer que $E(X) = n\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}$.
   (c) Posons $l = k-1$, sachant que k prend ses valeurs entre 1 et n qu'en est-il de l ? Reprendre l'égalité obtenue à la question précédente en l'écrivant en fonction de l, et par une mise en facteur de p, montrer que :
   $$E(X) = np\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}p^l(1-p)^{n-1-l} =$$
   (d) Reconnaître dans la somme $\displaystyle\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}p^l(1-p)^{n-1-l}$ la formule du binôme et retrouver sa forme factorisée. Enfin, en déduire une expression très simple de $E(X)$.