Exercices

Logique

Exercice 1/33

1. Écrire en extension : $\{n \in \mathbb{N},\ n \leq 8\}$
2. Écrire en compréhension : $\{2; 3; 5; 9; 17\}$

Exercice 2/33

Donner l'écriture en extension des ensembles suivants.

1. $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 2 \text{ et } n < 7\}$
2. $\{n \in \mathbb{Z} \mid n < 2 \text{ et } n \geq 7\}$
3. $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 4 \text{ ou } n < 7\}$
4. $\{n \in \mathbb{N} \mid n < 2 \text{ ou } n \geq 4\}$

Exercice 3/33

Donner une écriture en compréhension des ensembles suivants.

1. $\{6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22\}$
2. $\{-8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13\}$
3. $\{-21, -17, -13, -9, -5, -1, 3, 7\}$
4. $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...\}$

Exercice 4/33

Soit $n > 0$. Démontrer que si n est le carré d'un entier, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 5/33

Démontrer que, pour tout entier relatif n, $n(n-5)(n+5)$ est divisible par 3.

Exercice 6/33

Déterminer les réels x tels que $\sqrt{2-x} = x$.

Exercice 7/33

Le but de cet exercice est de démontrer par contraposition la propriété suivante, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

Si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

1. Écrire la contraposée de la proposition précédente.
2. En remarquant qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 3\}$, (à justifier), prouver la contraposée.
3. A-t-on démontré la propriété de l'énoncé ?

Exercice 8/33

Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$
2. $\forall M > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \geq A,\ f(x) < M$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0 \Longrightarrow x \leq 5$
4. $\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x, y) \in I^2,\ (|x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon)$.

Exercice 9/33

Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. f est strictement croissante
2. f est la fonction nulle

Exercice 10/33

Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ alors $\dfrac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

Exercice 11/33

Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction. Énoncer en langage courant les assertions suivantes écrites à l'aide de quantificateurs. Peut-on trouver une fonction qui satisfait cette assertion ? Qui ne la satisfait pas ?

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ f(x) < f(y)$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists T \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x + T)$

3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists T \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = f(x+T)$
4. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y = f(x)$

Exercice 12/33 : Pour le plaisir du raisonnement !

Parmi toutes les propositions suivantes, regrouper par paquets celles qui sont équivalentes :

1. Tu auras ton examen si tu travailles régulièrement.
2. Pour avoir son examen, il faut travailler régulièrement.
3. Si tu ne travailles pas régulièrement, tu n'auras pas ton examen.
4. Il est nécessaire de travailler régulièrement pour avoir son examen.
5. Pour avoir son examen, il suffit de travailler régulièrement.
6. Ne pas travailler régulièrement entraîne un échec à l'examen.
7. Si tu n'as pas ton examen, c'est que tu n'as pas travaillé régulièrement.
8. Travail régulier implique réussite à l'examen.
9. On ne peut avoir son examen qu'en travaillant régulièrement

Exercice 13/33

On considère la proposition $\mathcal{P}$ suivante :
$\mathcal{P}$: « Pour tout nombre réel x, il existe au moins un entier naturel N supérieur ou égal à x »

1. Écrire la proposition $\mathcal{P}$ avec des quantificateurs.
2. Écrire la négation avec des quantificateurs puis lénoncer en français.

Exercice 14/33

Pour chaque couple d'affirmation, indique si $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$, ou $\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P}$, ou $\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$.
Ci-dessous a, b et c désignent des nombres réels et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. – $\mathcal{P}$: « Je suis née en 1998 ».
   – $\mathcal{Q}$: « Je fête mes 17 ans en 2015 ».
2. – $\mathcal{P}$: « J'aime toutes les matières scientifiques ».
   – $\mathcal{Q}$: « J'aime les mathématiques ».
3. – $\mathcal{P}$: « La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ ».
   – $\mathcal{Q}$: « $f(0) \leq f(1)$ ».
4. – $\mathcal{P}$: « $b^2 - 4ac < 0$ ».
   – $\mathcal{Q}$: « L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle ».
5. – $\mathcal{P}$: « $a^2 > 1$ ».
   – $\mathcal{Q}$: « $a > 1$ ».

Exercice 15/33

Soit n un entier naturel quelconque. Parmi les implications suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ? Donner leur contraposée et leur négation.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq 5) \Longrightarrow (n > 3)$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq 5) \Longrightarrow (n > 6)$
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq 5) \Longrightarrow (n \leq 6)$

4. $\forall n \in \mathbb{N},\ (n < 1) \Longrightarrow (2 \text{ divise } n)$
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ (n < 1) \Longrightarrow (n \text{ divise } 2)$
6. $\forall n \in \mathbb{N},\ (n < 2) \Longrightarrow (n^2 = n)$

Exercice 16/33

Compléter, lorsque c'est possible, avec $\forall$ ou $\exists$ pour que les énoncés suivants soient vrais :

1. $.....x \in \mathbb{R},\ (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
2. $.....x \in \mathbb{R},\ x^2 + 3x + 2 = 0$
3. $.....x \in \mathbb{R},\ 2x + 1 = 0$
4. $.....x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x + 3 \neq 0$

Exercice 17/33

Les propositions suivantes sont-elles vraies ? Lorsqu'elles sont fausses, énoncer leur négation.

1. $\exists x \in \mathbb{N},\ x^2 > 7$
2. $\forall x \in \mathbb{N},\ x^2 > 7$
3. $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ y > x^2$
4. $\exists x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ y > x^2$

Exercice 18/33

Parmi les équivalences suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq 5) \Longleftrightarrow (n > 4)$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq 5) \Longleftrightarrow (n \geq 4)$
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ ((n \geq 5) \text{ et } (n \text{ divise } 12)) \Longleftrightarrow (n = 6)$

Exercice 19/33

Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ alors $\dfrac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

Exercice 20/33

Démontrer que si le carré d'un entier naturel est pair, alors l'entier lui-même est pair.

Exercice 21/33

Nie les affirmations suivantes :

1. J'ai au moins 18 ans
2. Je n'ai ni frère, ni sœur
3. $\exists x \in [0; +\infty[,\ f(x) \geq 3$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 2x + 1$
5. La fonction f s'annule exactement une fois sur $[0; 2]$.
6. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$
7. $\forall M > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \geq A,\ f(x) > M$

8. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0 \Longrightarrow x \leq 0$
9. $\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x;y) \in I^2,\ (|x-y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon)$.

Exercice 22/33

Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ trois propositions, donner la négation de :

1. $\mathcal{P}$ et (non($\mathcal{Q}$) ou $\mathcal{R}$)
2. ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) $\Longrightarrow \mathcal{R}$

Exercice 23/33

Donner la négation mathématique des phrases suivantes

1. Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges
2. Certains nombres entiers sont pairs.
3. Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4.
4. f est une fonction paire sur $\mathbb{R}$, c'est à dire « $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$ »

Exercice 24/33

1. Donner la négation de la phrase mathématique suivante :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ n \geq N \text{ et } p \geq 0 \Longrightarrow |u_{n+p} - u_n| < \epsilon$$

2. Donner la contraposée de la phrase mathématique suivante :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ n \geq N \text{ et } p \geq 0 \Longrightarrow |u_{n+p} - u_n| < \epsilon$$

Exercice 25/33

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Donner la négation et la contraposée de cette phrase logique.

Exercice 26/33

Résoudre par implication/vérification dans $\mathbb{R}$, l'équation suivante : $\sqrt{x+7} = x - 5$

Exercice 27/33

Résoudre par équivalence dans $\mathbb{R}$, l'équation suivante : $\sqrt{x+7} = x - 5$

Exercice 28/33

Démontrer l'inéquation suivante en utilisant un raisonnement par équivalence :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad a + \frac{1}{a} \geq 2$$

Exercice 29/33

Démontrer que si le carré d'un entier naturel est pair, alors l'entier lui-même est pair.

Exercice 30/33

Montrer que la proposition « $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq x^2$ » est fausse.

Exercice 31/33

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x+7} \geq x - 5$.

Exercice 32/33

Montrer que la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle de côté 1 nest pas un nombre rationnel.

Exercice 33/33

Deux gardiens sont devant 2 portes. L'une mène à la liberté, et l'autre en prison. L'un des gardien est un menteur, et l'autre, au contraire, ne dit que la vérité. On ne sait pas quel gardien est devant quelle porte. On veut bien sûr savoir où est la liberté. Pour cela, on peut poser 1 question. Attention, on na qu'une seule question à poser à 1 seul gardien. Quelle question poseriez-vous ?