



Exercices

LOGIQUE

Exercice 1/24

1. Écrire en extension : $\{n \in \mathbb{N}, n \leq 8\}$
2. Écrire en compréhension : $\{2; 3; 5; 9; 17\}$

Exercice 2/24

Donner l'écriture en extension des ensembles suivants.

1. $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 2 \text{ et } n < 7\}$
2. $\{n \in \mathbb{Z} \mid n < 2 \text{ et } n \geq 7\}$
3. $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 4 \text{ ou } n < 7\}$
4. $\{n \in \mathbb{N} \mid n < 2 \text{ ou } n \geq 4\}$

Exercice 3/24

Donner une écriture en compréhension des ensembles suivants.

1. $\{6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22\}$
2. $\{-8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13\}$
3. $\{-21, -17, -13, -9, -5, -1, 3, 7\}$
4. $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \dots\}$

Exercice 4/24

On considère la proposition \mathcal{P} suivante :

\mathcal{P} : « Pour tout nombre réel x , il existe au moins un entier naturel N supérieur ou égal à x »

1. Écrire la proposition \mathcal{P} avec des quantificateurs.
2. Écrire la négation avec des quantificateurs puis énoncer en français.

Exercice 5/24

Pour chaque couple d'affirmation, indique si $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$, ou $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$, ou $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$.

Ci-dessous a , b et c désignent des nombres réels et f une fonction définie sur \mathbb{R} .

1.
 - \mathcal{P} : « Je suis née en 1998 ».
 - \mathcal{Q} : « Je fête mes 17 ans en 2015 ».
2.
 - \mathcal{P} : « J'aime toutes les matières scientifiques ».
 - \mathcal{Q} : « J'aime les mathématiques ».

3. – \mathcal{P} : « La fonction f est croissante sur \mathbb{R} ».
– \mathcal{Q} : « $f(0) \leq f(1)$ ».
4. – \mathcal{P} : « $b^2 - 4ac < 0$ ».
– \mathcal{Q} : « L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle ».
5. – \mathcal{P} : « $a^2 > 1$ ».
– \mathcal{Q} : « $a > 1$ ».

Exercice 6/24

Soit n un entier naturel quelconque. Parmi les implications suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ? Donner leur contraposée et leur négation.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \implies (n > 3)$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \implies (n > 6)$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \implies (n \leq 6)$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \implies (2 \text{ divise } n)$
5. $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \implies (n \text{ divise } 2)$
6. $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 2) \implies (n^2 = n)$

Exercice 7/24

Compléter, lorsque c'est possible, avec \forall ou \exists pour que les énoncés suivants soient vrais :

1. $x \in \mathbb{R}, (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$
2. $x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 2 = 0$
3. $x \in \mathbb{R}, 2x + 1 = 0$
4. $x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 \neq 0$

Exercice 8/24

Les propositions suivantes sont-elles vraies ? Lorsqu'elles sont fausses, énoncer leur négation.

1. $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 > 7$
2. $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 > 7$
3. $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x^2$
4. $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, y > x^2$

Exercice 9/24

Parmi les équivalences suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \iff (n > 4)$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \iff (n \geq 4)$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, ((n \geq 5) \text{ et } (n \text{ divise } 12)) \iff (n = 6)$

Exercice 10/24

Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ alors $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

Exercice 11/24

Démontrer que si le carré d'un entier naturel est pair, alors l'entier lui-même est pair.

Exercice 12/24

Nie les affirmations suivantes :

1. J'ai au moins 18 ans
2. Je n'ai ni frère, ni sœur
3. $\exists x \in [0; +\infty[$, $f(x) \geq 3$
4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 2x + 1$
5. La fonction f s'annule exactement une fois sur $[0; 2]$.
6. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$
7. $\forall M > 0$, $\exists A > 0$, $\forall x \geq A$, $f(x) > M$
8. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0 \implies x \leq 0$
9. $\forall \epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall (x; y) \in I^2$, $(|x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \epsilon)$.

Exercice 13/24

Soient \mathcal{P} , \mathcal{Q} et \mathcal{R} trois propositions, donner la négation de :

1. \mathcal{P} et ($\text{non}(\mathcal{Q})$ ou \mathcal{R})
2. $(\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}) \implies \mathcal{R}$

Exercice 14/24

Donner la négation mathématique des phrases suivantes

1. Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges
2. Certains nombres entiers sont pairs.
3. Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4.
4. f est une fonction paire sur \mathbb{R} , c'est à dire « $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ »

Exercice 15/24

1. Donner la négation de la phrase mathématique suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } p \geq 0 \implies |u_{n+p} - u_n| < \epsilon$$

2. Donner la contraposée de la phrase mathématique suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } p \geq 0 \implies |u_{n+p} - u_n| < \epsilon$$

Exercice 16/24

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Donner la négation et la contraposée de cette phrase logique.

Exercice 17/24

Résoudre par implication/vérification dans \mathbb{R} , l'équation suivante : $\sqrt{x+7} = x - 5$

Exercice 18/24

Résoudre par équivalence dans \mathbb{R} , l'équation suivante : $\sqrt{x+7} = x - 5$

Exercice 19/24

Démontrer l'inéquation suivante en utilisant un raisonnement par équivalence :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad a + \frac{1}{a} \geq 2$$

Exercice 20/24

Démontrer que si le carré d'un entier naturel est pair, alors l'entier lui-même est pair.

Exercice 21/24

Montrer que la proposition « $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x^2$ » est fausse.

Exercice 22/24

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\sqrt{x+7} \geq x - 5$.

Exercice 23/24

Montrer que la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle de côté 1 n'est pas un nombre rationnel.

Exercice 24/24

Deux gardiens sont devant 2 portes. L'une mène à la liberté, et l'autre en prison. L'un des gardien est un menteur, et l'autre, au contraire, ne dit que la vérité. On ne sait pas quel gardien est devant quelle porte. On veut bien sûr savoir où est la liberté. Pour cela, on peut poser 1 question. Attention, on ne peut poser qu'une seule question à 1 seul gardien. Quelle question poseriez-vous ?