Exercices

Logarithme népérien

Exercice 1/34

Effectuer le calcul suivant :

$$A = \ln\left(e^4\sqrt{e}\right) + \ln\left(e^2\right)\ln\left(\frac{1}{e^{-9}}\right) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e^{-7}}}\right)$$

On donnera la réponse sous la forme la plus simple possible.

Exercice 2/34 : Vrai ou faux

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant.

1. $\ln\left(\frac{5}{4}\right) + \ln\left(\frac{3}{10}\right) - \ln\left(\sqrt{3}\right) + \ln\left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right) = 0$.
2. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$.
   La suite $(\ln(u_n))$ est arithmétique.
3. L'ensemble solution de l'inéquation $\ln(2-3x) < 2$ est $\left]\frac{2-e^2}{3}; +\infty\right[$.
4. La courbe d'équation $y = 2 + \frac{\ln(x)}{x}$ dans un repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$ admet une asymptote au voisinage de $+\infty$.
5. L'équation $e^{3x\ln(2)} - \frac{\ln(3)}{x\ln(2)} = 26$ admet une unique solution sur $]0; +\infty[$, qui vaut $\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$.

Exercice 3/34

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\ln\left((3-2\sqrt{2})^7\right) + \ln\left((3+2\sqrt{2})^7\right)$
2. $-3\ln\left(e^{-1}\right) - 2\ln\left(e^3\right) + 2\ln\left(e\sqrt{e}\right)$
3. $\ln\left(\sqrt{50}\right) + \ln(8) - 3\ln(5) + \ln\left(4^{-1}\right)$
4. $2\ln\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) + \ln\left(\frac{3}{5}\right)$

Exercice 4/34

1. Résoudre dans $]1; +\infty[$ l'équation :

$$\ln(x-1) + \ln(x+1) + \ln(x+1) = \ln\left(x^2-1\right) - \ln(0,25)$$

2. Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation :

$$2\ln(x) - \ln(x+1) = 2\ln(2)$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$2e^{2x} \geq 6$$

Exercice 5/34

Effectuer le calcul suivant :

$$A = \ln\left(\frac{e^{-4}}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$$

On donnera la réponse sous la forme la plus simple possible.

Exercice 6/34

1. Quel est l'ensemble des solutions de

$$2^x \leq 8$$

2. Quel est l'ensemble des solutions de

$$\ln(x) \leq 5$$

Exercice 7/34

Quel est l'ensemble des solutions de

$$16 \times 10^x \geq 3$$

Exercice 8/34

Quel est l'ensemble des solutions de

1. $\left(\frac{3}{4}\right)^x \leq 3$
2. $3\ln x - 1 \leq 5$

Exercice 9/34

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $\ln(x+1) \leq 7$
2. $2\ln(2x+5) > \ln(9)$
3. $(e^x - 2)(e^x + 1) > 0$
4. $\ln\left(x + \frac{3}{2}\right) > -\ln(x)$
5. $(x+1)^3 = e^7$

Exercice 10/34

Quel est l'ensemble des solutions de

$$8 \times 8^x = 7$$

Exercice 11/34

Étudier complètement la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = -3x\ln(x) + 2x$

Exercice 12/34

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :
$f(x) = -x\ln(x)$

1. Calculer la fonction dérivée de f.
2. Résoudre l'inéquation $f'(x) \geq 0$ sur $]0;+\infty[$.
3. Construire complètement le tableau de variation de f.

Exercice 13/34

Abréviation du terme « potentiel hydrogène », le pH précise si un milieu est acide, neutre ou basique. L'acidité dépend en effet de la concentration en ions hydronium H_3O^+ qui se calcule en fonction du pH par :

$$[H_3O^+] = 10^{-PH}$$

Calculer le pH du jus de citron dont la concentration en ions hydronium est de $0,005\ mol.L^{-1}$

Exercice 14/34

La densité optique D d'un milieu est donnée par : $D = -\log(T)$, où T désigne le facteur de transmission du milieu ($0 < T \leq 1$).
On considère la fonction f définie sur $]0;1]$ par $f(x) = -\log(x)$

1. Construire le tableau de variations de la fonction f sur $]0;1]$
2. Déterminer la densité optique d'un milieu dont le facteur de transmission est de 0,4
3. Le facteur de transmission lorsque la densité optique est égale à 1

Exercice 15/34

1. Un premier capital de 6 000 euros est placé à intérêts composés au taux annuel de 9%. Au bout de combien d'années ce capital aura-t-il doublé ? Triplé ?
2. Un deuxième capital de 9 000 euros est placé le même jour à intérêts composés au taux annuel de 6%.
   Au bout de combien d'années la valeur du premier capital aura-t-elle dépassé le second ?

Exercice 16/34

Résoudre l'inéquation $3 - \dfrac{\ln(2x+1)}{2} \geq 1$.

Exercice 17/34 : Position relative

Le plan est rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'équation $y = \ln(x)$.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
2. Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = \ln(x) - x + 1$.
   (a) Étudier les variations de f.
   (b) En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ définie au 1.

(c) La fonction ln est-elle convexe ? Concave ? Justifier votre réponse.

(d) Vérifier vos réponse en traçant $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ à l'aide de la calculatrice.

Exercice 18/34

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer sa dérivée et en déduire ses variations sur l'intervalle I à déterminer.

1. $f(x) = \ln(2x-5) - \ln(x)$
2. $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1})$
3. $f(x) = 2e^{2x} - 9x + 1$

Exercice 19/34

Soit la fonction $f \ : \ x \longmapsto x\ln(x)$
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudier les variations de f, puis dresser son tableau de variations complet.
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1, puis celle de la tangente $\mathcal{T}'$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse e.

Exercice 20/34

Étudier complètement la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par,

$$f(x) = 2 \times \ln(x + 5 + \frac{1}{x})$$

Exercice 21/34

Étudier complètement la fonction f définie sur $]\frac{4}{3};+\infty[$ par $f(x) = -\ln(3x-4)$

Exercice 22/34

Étudier complètement la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 6 - 8x - 7x\ln(x)$

Exercice 23/34

Étudier complètement la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 5(\ln(x))^2 - 3\ln(x) - 4$

Exercice 24/34 : *

On considère la fonction f définie sur $]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{x-2}\right)$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Démontrer que pour tout réel $x \in]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[$, on a : $f(1-x) = -f(x)$.
2. Quelle conséquence graphique peut-on en tirer ?

Exercice 25/34 : *

Déterminer les limites des fonctions f suivantes (on précisera si ces limites justifient l'existence d'asymptotes) :

1. $f(x) = 2x - \ln(x)$ en $+\infty$
2. $f(x) = \dfrac{2+\ln(x)}{x^3}$ en $+\infty$
3. $f(x) = \ln(x+1) - 2\ln(x)$ en $+\infty$
4. $f(x) = x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ en $+\infty$
5. $f(x) = \ln(x)\ln(1-x)$ en 0
6. $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$ en $-\infty$

Exercice 26/34 : *

Soit f la fonction définie $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$ et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

1. (a) Étudier la limite de f en 0
   (b) Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
   (c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}$.
2. (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Démontrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-1-2\ln(x)}{x^3}$.
   (b) Résoudre sur l'intervalle $]0;+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   (c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. (a) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.
   (b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Exercice 27/34 : *

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$.

1. **Étude de la fonction f**
   (a) Déterminer les limites de la fonction f en 1 et en $+\infty$.
   (b) Étudier les variations de la fonction f.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.
   (a) Tracer dans un repère orthonormé la courbe représentative de $\mathcal{C}$ de la fonction f, la droite d'équation $y = x$ et les points M_0, M_1 et M_2 de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2.
   Proposer une conjecture sur le comportement de la suite (u_n).
   (b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq e$.
   (c) Démontrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ de l'intervalle $[e;+\infty[$
3. On rappelle que la fonction f est continue sur l'intervalle $]1;+\infty[$.
   (a) Démontrer que $f(\ell) = \ell$
   (b) En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 28/34 : Suite harmonique et constante d'Euler **

1. Démontrer que pour tout réel $x \geq 1$, $\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \dfrac{1}{x}$.
2. On pose pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
3. On pose pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$. Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante.
4. Démontrer que $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.
5. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune γ qu'on appelle la constante d'Euler.
6. Determiner pour quelle valeur de l'entier n on obtiendrait une valeur approchée de γ à 10^{-3} près. Calculer alors une valeur approchée de γ à 10^{-3} près.

Exercice 29/34

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x - 2$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. (a) Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, on a $f'(x) = \ln(x)$.
   (b) Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = e$.
   (c) Justifier que la fonction f est convexe sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   (d) En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la tangente $\mathcal{T}$.
2. (a) Calculer la limite de la fonction f en 0.
   (b) Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
4. (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0;+\infty[$. On note α cette solution.
   (b) Justifier que le réel α appartient à l'intervalle $]4,3;4,4[$.
   (c) En déduire le signe de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
5. On considère la fonction seuil suivante écrite dans le langage python.
   On rappelle que la fonction log du module math (que l'on suppose importé) désigne la fonction logarithme népérien ln.

```
def seuil(pas):
    x=4.3
    while x*log(x)-x-2<0:
        x=x+pas
    return x
```

   Quelle est la valeur renvoyée à l'appel de la fonction seuil(0.01) ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 30/34

On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = x + ke^{-x}$, où k est un réel strictement positif.

1. On sintéresse dans cette question au cas $k = 0,5$, donc à la fonction $f_{0,5}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_{0,5}(x) = x + 0,5e^{-x}$$

   (a) Montrer que la dérivée de $f_{0,5}$ notée $f'_{0,5}$ vérifie $f'_{0,5}(x) = 1 - 0,5e^{-x}$.

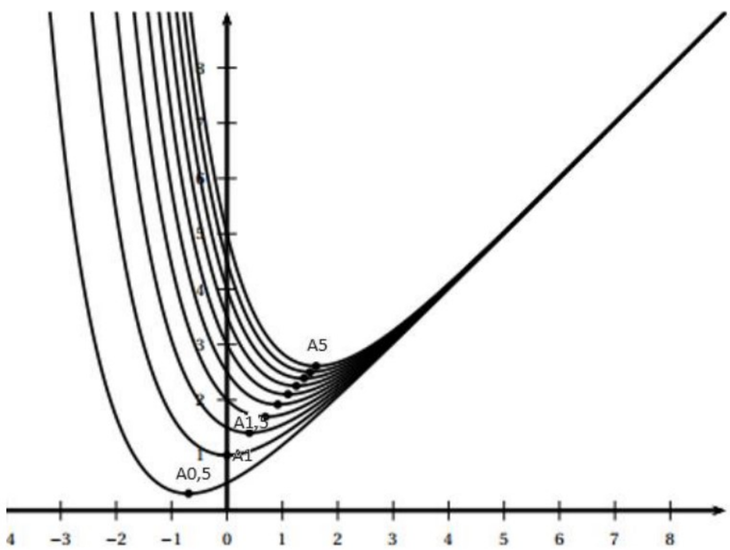
   (b) Montrer que la fonction $f_{0,5}$ admet un minimum en $\ln(0,5)$.
   Soit k un réel strictement positif. On donne le tableau de variations de la fonction f_k.

Valeurs de x	$-\infty$	$\ln(k)$	$+\infty$
Variations de f_k	$+\infty$ ↘	$f_k(\ln k)$	↗ $+\infty$

2. Montrer que pour tout réel positif k, $f_k(\ln(k)) = \ln(k) + 1$.

   On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé. On note A_k le point de la courbe $\mathcal{C}_k$ d'abscisse $\ln(k)$.

   On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathcal{C}_k$ pour différentes valeurs de k.



3. Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Justifier la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
   Affirmation : « Pour tout réel k strictement positif, les points $A_{0,5}$, A_1 et A_k sont alignés. ».

Exercice 31/34 : Spécialité Mathématiques (Amérique du Sud 1) - Bac 2023

Cliquer et faire l'exercice 1

Exercice 32/34 : Spécialité Mathématiques (Amérique du Sud 2) - Bac 2023

Cliquer et faire l'exercice 4

Exercice 33/34 : Spécialité Mathématiques (Asie 1) - Bac 2023

Cliquer et faire l'exercice 3

Exercice 34/34 : Spécialité Mathématiques (Asie 2) - Bac 2023

Cliquer et faire l'exercice 2