



Exercices

LOGARITHME NÉPÉRIEN

Exercice 1/32

Effectuer le calcul suivant :

$$A = \ln(e^4 \sqrt{e}) + \ln(e^2) \ln\left(\frac{1}{e^{-9}}\right) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e^{-7}}}\right)$$

On donnera la réponse sous la forme la plus simple possible.

Exercice 2/32 : Vrai ou faux

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant.

- $\ln\left(\frac{5}{4}\right) + \ln\left(\frac{3}{10}\right) - \ln(\sqrt{3}) + \ln\left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right) = 0$.
- On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$.
La suite $(\ln(u_n))$ est arithmétique.
- L'ensemble solution de l'inéquation $\ln(2 - 3x) < 2$ est $\left] \frac{2 - e^2}{3}; +\infty \right[$.
- La courbe d'équation $y = 2 + \frac{\ln(x)}{x}$ dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ admet une asymptote au voisinage de $+\infty$.
- L'équation $e^{3x \ln(2)} - \frac{\ln(3)}{x \ln(2)} = 26$ admet une unique solution sur $]0; +\infty[$, qui vaut $\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$.

Exercice 3/32 : *

Simplifier les expressions suivantes :

- $\ln((3 - 2\sqrt{2})^7) + \ln((3 + 2\sqrt{2})^7)$
- $-3 \ln(e^{-1}) - 2 \ln(e^3) + 2 \ln(e\sqrt{e})$
- $\ln(\sqrt{50}) + \ln(8) - 3 \ln(5) + \ln(4^{-1})$
- $2 \ln\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) + \ln\left(\frac{3}{5}\right)$

Exercice 4/32

- Résoudre dans $]1; +\infty[$ l'équation :

$$\ln(x - 1) + \ln(x + 1) + \ln(x + 1) = \ln(x^2 - 1) - \ln(0,25)$$

- Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation :

$$2 \ln(x) - \ln(x + 1) = 2 \ln(2)$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$2e^{2x} \geq 6$$

Exercice 5/32

Effectuer le calcul suivant :

$$A = \ln\left(\frac{e^{-4}}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$$

On donnera la réponse sous la forme la plus simple possible.

Exercice 6/32

1. Quel est l'ensemble des solutions de

$$2^x \leq 8$$

2. Quel est l'ensemble des solutions de

$$\ln(x) \leq 5$$

Exercice 7/32

Quel est l'ensemble des solutions de

$$16 \times 10^x \geq 3$$

Exercice 8/32

Quel est l'ensemble des solutions de

$$1. \left(\frac{3}{4}\right)^x \leq 3$$

$$2. 3 \ln x - 1 \leq 5$$

Exercice 9/32

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

$$1. \ln(x+1) \leq 7$$

$$2. 2 \ln(2x+5) > \ln(9)$$

$$3. (e^x - 2)(e^x + 1) > 0$$

$$4. \ln\left(x + \frac{3}{2}\right) > -\ln(x)$$

$$5. (x+1)^3 = e^7$$

Exercice 10/32

Quel est l'ensemble des solutions de

$$8 \times 8^x = 7$$

Exercice 11/32

Étudier complètement la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = -3x \ln(x) + 2x$

Exercice 12/32

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = -x \ln(x)$$

1. Calculer la fonction dérivée de f .
2. Résoudre l'inéquation $f'(x) \geq 0$ sur $]0; +\infty[$.
3. Construire complètement le tableau de variation de f .

Exercice 13/32

Abréviation du terme « potentiel hydrogène », le pH précise si un milieu est acide, neutre ou basique. L'acidité dépend en effet de la concentration en ions hydronium H_3O^+ qui se calcule en fonction du pH par :

$$[H_3O^+] = 10^{-PH}$$

Calculer le pH du jus de citron dont la concentration en ions hydronium est de $0,005 \text{ mol.L}^{-1}$

Exercice 14/32

La densité optique D d'un milieu est donnée par : $D = -\log(T)$, où T désigne le facteur de transmission du milieu ($0 < T \leq 1$).

On considère la fonction f définie sur $]0; 1]$ par $f(x) = -\log(x)$

1. Construire le tableau de variations de la fonction f sur $]0; 1]$
2. Déterminer la densité optique d'un milieu dont le facteur de transmission est de 0,4
3. Le facteur de transmission lorsque la densité optique est égale à 1

Exercice 15/32

1. Un premier capital de 6 000 euros est placé à intérêts composés au taux annuel de 9%. Au bout de combien d'années ce capital aura-t-il doublé ? Triplé ?
2. Un deuxième capital de 9 000 euros est placé le même jour à intérêts composés au taux annuel de 6%. Au bout de combien d'années la valeur du premier capital aura-t-elle dépassé le second ?

Exercice 16/32

Résoudre l'inéquation $3 - \frac{\ln(2x+1)}{2} \geq 1$.

Exercice 17/32 : Position relative

Le plan est rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'équation $y = \ln(x)$.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
2. Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = \ln(x) - x + 1$.
 - (a) Étudier les variations de f .
 - (b) En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ définie au 1.

- (c) La fonction $\ln$ est-elle convexe ? Concave ? Justifier votre réponse.
 (d) Vérifier vos réponse en traçant $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ à l'aide de la calculatrice.

Exercice 18/32

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer sa dérivée et en déduire ses variations sur l'intervalle I à déterminer.

1. $f(x) = \ln(2x - 5) - \ln(x)$
2. $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1})$
3. $f(x) = 2e^{2x} - 9x + 1$

Exercice 19/32

Soit la fonction $f : x \mapsto x \ln(x)$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Préciser l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudier les variations de f , puis dresser son tableau de variations complet.
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1, puis celle de la tangente $\mathcal{T}'$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse e .

Exercice 20/32

Étudier complètement la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par,

$$f(x) = 2 \times \ln\left(x + 5 + \frac{1}{x}\right)$$

Exercice 21/32

Étudier complètement la fonction f définie sur $]\frac{4}{3}; +\infty[$ par $f(x) = -\ln(3x - 4)$

Exercice 22/32

Étudier complètement la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 6 - 8x - 7x \ln(x)$

Exercice 23/32

Étudier complètement la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 5(\ln(x))^2 - 3\ln(x) - 4$

Exercice 24/32 : *

On considère la fonction f définie sur $] -\infty; -1[\cup]2; +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{x-2}\right)$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f .

1. Démontrer que pour tout réel $x \in] -\infty; -1[\cup]2; +\infty[$, on a : $f(1-x) = -f(x)$.
2. Quelle conséquence graphique peut-on en tirer ?

Exercice 25/32 : *

Déterminer les limites des fonctions f suivantes (on précisera si ces limites justifient l'existence d'asymptotes) :

- | | |
|---|--|
| 1. $f(x) = 2x - \ln(x)$ en $+\infty$ | 4. $f(x) = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ en $+\infty$ |
| 2. $f(x) = \frac{2 + \ln(x)}{x^3}$ en $+\infty$ | 5. $f(x) = \ln(x) \ln(1-x)$ en 0 |
| 3. $f(x) = \ln(x+1) - 2 \ln(x)$ en $+\infty$ | 6. $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$ en $-\infty$ |

Exercice 26/32 : *

Soit f la fonction définie $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$ et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

- (a) Étudier la limite de f en 0
(b) Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
(c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}$.
- (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Démontrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{-1 - 2 \ln(x)}{x^3}$.
(b) Résoudre sur l'intervalle $]0; +\infty[$ l'inéquation $-1 - 2 \ln(x) > 0$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
(c) Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- (a) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.
(b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Exercice 27/32 : *

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$.

- Étude de la fonction f**
(a) Déterminer les limites de la fonction f en 1 et en $+\infty$.
(b) Étudier les variations de la fonction f .
- Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .
(a) Tracer dans un repère orthonormé la courbe représentative de $\mathcal{C}$ de la fonction f , la droite d'équation $y = x$ et les points M_0 , M_1 et M_2 de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives u_0 , u_1 et u_2 .
Proposer une conjecture sur le comportement de la suite (u_n) .
(b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $u_n \geq e$.
(c) Démontrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ de l'intervalle $[e; +\infty[$.
- On rappelle que la fonction f est continue sur l'intervalle $]1; +\infty[$.
(a) Démontrer que $f(\ell) = \ell$
(b) En déduire la valeur de ℓ .

Exercice 28/32 : Suite harmonique et constante d'Euler **

1. Démontrer que pour tout réel $x \geq 1$, $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$.
2. On pose pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
3. On pose pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$. Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante.
4. Démontrer que $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.
5. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune γ qu'on appelle la constante d'Euler.
6. Déterminer pour quelle valeur de l'entier n on obtiendrait une valeur approchée de γ à 10^{-3} près. Calculer alors une valeur approchée de γ à 10^{-3} près.

Exercice 29/32 : Spécialité Mathématiques (Amérique du Sud 1) - Bac 2023

Cliquer et faire l'exercice 1

Exercice 30/32 : Spécialité Mathématiques (Amérique du Sud 2) - Bac 2023

Cliquer et faire l'exercice 4

Exercice 31/32 : Spécialité Mathématiques (Asie 1) - Bac 2023

Cliquer et faire l'exercice 3

Exercice 32/32 : Spécialité Mathématiques (Asie 2) - Bac 2023

Cliquer et faire l'exercice 2