Exercices

LOGARITHME DÉCIMAL

Exercice 1/37

Sans calculatrice, simplifier au maximum les expressions suivantes.

a. $A = \log(250) + \log(4)$

b. $B = \log(0{,}2) + \log(50)$

c. $C = \log(60) - \log(6)$

d. $D = \log(843) - \log(8\,430)$

e. $E = \log(2) + 2\log(5) + \log(200)$

f. $F = \log(34) - \log(3\,400)$

g. $G = \log(80) + \log(90) - \log(72)$

h. $H = \log(2) - \log(20\,000)$

i. $I = \log(390\,000\,000) - \log(3) - \log(1\,300)$

j. $J = \log(5\,000) - \log(0{,}5) + \log(10^2)$

k. $K = 2\log(4) - 4\log(2)$

l. $L = \log(125 \times 10^8) - 3\log(5)$

m. Soit x un réel strictement positif.
$M = 7\log(100) + 4\log(x^3) - 2\log(x^6)$.

Exercice 2/37

Soit a et b des réels strictement positifs. Exprimer en fonction de $\log(a)$ et/ou $\log(b)$ les réels suivants.

a. $A = \log\left(\dfrac{a}{b}\right) - \log(b)$

b. $B = 2\log\left(\dfrac{a}{b}\right) + \log\left(\dfrac{b}{a}\right) - \log\left(\dfrac{10}{a}\right)$

c. $C = 10\log(a) + 7\log\left(\dfrac{a}{b}\right) - 3\log(a)$

d. $D = \log(100) \times \big(\log(a^2) - \log(a)\big)\left(1 + \log\left(\dfrac{b}{10}\right)\right)$

Exercice 3/37

Soit a, b et c des réels strictement positifs. Exprimer les réels suivants sous la forme d'un seul logarithme.

a. $A = \log(a) + \log(b) + \log(c)$

b. $B = 3\log(a) + 2\log\left(\dfrac{1}{b}\right)$

c. $C = 5\log(a) - 4\log(b)$

d. $D = 2\big(\log(a) + \log(b)\big) - 3\log(c)$

Exercice 4/37

Écrire les nombres suivants sous la forme $a\log(2)$ où a est un réel.

1. $\log(8)$
2. $\log(16) + \log(4)$
3. $\log(0.125) + \log(64)$
4. $\log(48) - \log(12)$

Exercice 5/37

Résoudre les équations :

1. $27^x = 31\,681.$
2. $0{,}19^x = 35.$

Exercice 6/37

Résoudre dans $]0;+\infty[$ les équations suivantes :

1. $x^{0.5} = 1024$
2. $x^{0.2} = 256$
3. $x^{2.25} = 20$
4. $x^{5.3} = 857$
5. $2x^{3.8} - 5 = 479$

Exercice 7/37

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes. Il faudra la valeur exacte puis la valeur approchée à 10^{-2} près.

1. $2^x = 321$
2. $5^x = 965$
3. $6^x = 289$

Exercice 8/37

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $0{,}2^x > 71.$
2. $88^x \leq 6{,}3.$
3. $254^x < 0{,}1.$
4. $0{,}99^x \geq 736.$

Exercice 9/37

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $3^x < 260$
2. $0.4^x < 100$
3. $3.6^x < 947$
4. $0.01^x < 23$

Exercice 10/37

Résoudre dans $]0;+\infty[$ les inéquations suivantes :

1. $x^{3.35} < 62$
2. $x^{4.12} < 1256$
3. $x^{1.98} \leq 19$
4. $x^{7.54} \geq 2500$

Exercice 11/37

Comparer dans chaque cas les deux nombres :

1. $\log(2,1)$ et $\log(2,01)$
2. $\log(0.101)$ et $\log(0.11)$
3. $\log(0.0026)$ et $\log(0,0206)$
4. $\log\left(\sqrt{3}\right)$ et $\log\left(\sqrt{5}\right)$

Exercice 12/37

Résoudre les équations suivantes :

1. $x^{-61,2} = 237.$
2. $x^{225} = 318\,468.$

Exercice 13/37

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x^{81} \geq 46\,382{,}5.$
2. $x^{-13} < 974.$
3. $x^{-0,6} < 78{,}4.$
4. $x^{38} < 166\,498{,}9.$
5. $6^x = 256.$
6. $x^{-1,9} = 27{,}3.$
7. $3{,}3^x \geq 144.$
8. $x^{-8} < 816$

Exercice 14/37

Résoudre les équations suivantes.

a. $10^x = 500$

b. $2^x = 2048$

c. $7^x = 343$

Exercice 15/37

Résoudre les équations suivantes.

a. $x^5 = 500$

b. $x^3 = 1\,728$

c. $x^2 = 0{,}9\,025$

d. $x^{10} = 59\,049$

Exercice 16/37

Résoudre les équations suivantes.

a. $x^3 = 0{,}006\,859$

b. $x^2 = 0{,}5\,929$

c. $x^4 = 1\,296$

d. $x^4 = 311{,}1\,696$

e. $x^6 = 46\,656$

Exercice 17/37

Résoudre les équations suivantes.

a. $8^x = 32\,768$

b. $12^x + 1^3 = 1\,729$

c. $10^3 + 9^x = 1\,729$

d. $6^x + 1 = 7\,777$

Exercice 18/37

Résoudre les inéquations suivantes.

a. $8^x \leq 32\,768$

b. $11^x < 1\,331$

c. $5^x \geq 15\,625$

d. $1{,}2^x > 2{,}0736$

Exercice 19/37

Résoudre les inéquations suivantes.

a. $3^x \leq 243$

b. $12^x < 1\,728$

c. $11^x \geq 14\,641$

d. $1{,}9^x > 3{,}61$

Exercice 20/37

Résoudre les inéquations suivantes.

a. $x^3 \leq 50{,}653$

b. $x^5 < 371\,293$

c. $x^4 \geq 4\,304{,}6721$

d. $x^2 > 400 - 39$

Exercice 21/37

Résoudre les inéquations suivantes.

a. $x^7 \leq 128$

b. $x^3 < 91{,}125$

c. $x^2 \geq 90 - 9$

d. $x^4 > 72 + 9$

Exercice 22/37

Résoudre les équations et les inéquations suivantes.

a. $2^x = 8$; $3^x = 9$ et $4^x = 10$.

b. $2^x < 8$; $3^x < 9$ et $4^x < 10$.

c. $x^5 = 729$; $x^6 = 729$ et $x^7 = 729$.

d. $x^5 > 729$; $x^6 > 729$ et $x^7 > 729$.

Exercice 23/37

Calculer à la main les nombres suivants.

a. $10^{\log(9)}$

b. $10^{\log\left(\frac{100}{25}\right)} \times 10^{\log(1)}$

c. $\dfrac{10^{\log(0{,}01)}}{10^{\log(0{,}0001)}}$

d. $\log(10^{2{,}7})$

e. $\log(10^3) + \log(10^{-\sqrt{9}})$

f. $\log(10^{36}) \times \log(10^{-6})$

Exercice 24/37

Calculer à la main les nombres suivants.

a. $\log\left(\dfrac{10 \times 100}{10^4}\right)$

b. $10^{\log(7)}$

c. $10^{\log\left(\frac{125}{25}\right)} \times 10^{\log(1)}$

d. $\log(2 \times 54 \times \sqrt{64})$

e. $\sqrt{\log(10^9)}$

Exercice 25/37

On place une somme donnée sur un livret qui rapporte 1 % d'intérêts nets par an (les intérêts sont composés). On cherche à savoir au bout de combien d'années seront nécessaires pour doubler son capital.

a. Montrer que le problème revient à résoudre l'inéquation

$$1{,}01^n \geq 2.$$

b. Résoudre alors cette inéquation et répondre au problème posé.

Exercice 26/37

Soit x un réel strictement positif. Écrire les nombres suivants sous la forme $n + k \times \log(x)$ où n et k sont des entiers relatifs.

a. $A = \log(10x)$

b. $B = \log(1000x)$

c. $C = \log(0{,}01x)$

d. $D = \log(0{,}1x) + \log(100x) + \log(0{,}001x)$

e. $E = \log(2000x) - \log(2x) + \log(1000x)$

f. $F = \log(0{,}002x) + \log(50x)$

g. $G = \log(14x) - \log(70x) + \log(500x)$

h. $H = \log(10^4 x) + \log(10^3 x) + \log(10^2 x) + \log(10x)$

Exercice 27/37

Soit x un réel strictement positif. Écrire les nombres suivants sous la forme $k \times \log(x)$ où k est un entier relatif.

a. $A = \log(x^5)$

b. $B = 2\log(x^3) - \log(x^{10})$

c. $C = 20 + 5\log\left(\dfrac{x^{11}}{10^4}\right) - 3\log(x^{17})$

Exercice 28/37

Soit a un réel strictement positif et n un entier naturel, montrer qu'alors

$$\log\left(\frac{1}{a^n}\right) = -n \times \log(a).$$

Exercice 29/37

On rappelle que pour tout réel positif a, $\sqrt{a}$ est l'unique réel positif tel que $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$.

a. Soit a un réel strictement positif. Déterminer une écriture de $\log(a)$ en fonction de $\log(\sqrt{a})$.

b. En déduire une écriture de $\log(\sqrt{a})$ en fonction de $\log(a)$.

c. Soit a un réel strictement positif. Déterminer une écriture de

$$\log\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

en fonction de $\log(a)$.

Exercice 30/37

Sur $]0;+\infty[$, on définit la fonction logarithme notée colog par

$$\text{colog}(x) = \log\left(\frac{1}{x}\right).$$

a. Combien vaut colog(1000) ?

b. Combien vaut colog(0,01) ?

c. Soient a et b des réels strictement positifs. Montrer qu'alors

$$\text{colog}(ab) = \text{colog}(a) + \text{colog}(b).$$

d. Soient a et b des réels strictement positifs. Montrer qu'alors

$$\text{colog}\left(\frac{a}{b}\right) = \text{colog}(a) - \text{colog}(b).$$

Exercice 31/37

En chimie des solutions, il existe un indicateur d'acidité appelé potentiel hydrogène et noté pH. Il est défini à partir d'un logarithme décimal comme suit :

$$\text{pH} = -\log([\text{H}^+])$$

où $[\text{H}^+]$ désigne la concentration en ions hydrogènes. Les pH inférieurs à 7 désignent des milieux acides, les pH supérieurs à 7 désignent des milieux basiques. On peut par exemple se poser les questions suivantes :
On rappelle que le pH est défini par

$$\text{pH} = -\log([\text{H}^+]),$$

où $[\text{H}^+]$ désigne la concentration en ions hydrogène.

a. Sachant que, dans le jus de citron, la concentration en ions hydrogène est d'environ 0,003162, déterminer le pH du jus de citron.

b. Sachant que le pH de l'eau de mer est de 8,2, déterminer la concentration en ions hydrogène dans l'eau de mer.

Exercice 32/37

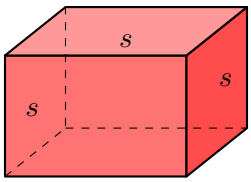
On considère un cube dont les côtés sont de longueur s.

a. Si a est strictement positif, démontrer que

$$a^b = 10^{b\log(a)}.$$

b. Quelle est la valeur maximale de s pour que le volume d'un tel cube ne dépasse pas 512 ?

c. Quelle est la valeur maximale de s pour que la surface totale de ses faces ne dépasse pas 486 ?



Exercice 33/37

Louis et Manon sont deux élèves qui ont écrit une succession d'inégalités. Chacun a commis une erreur. Ainsi, Louis démontre que $32 < 16$ et Manon, quant à elle, trouve que $10 > 16$. Pour chacun d'entre eux, justifier les étapes justes de leur raisonnement et repérer l'erreur.

a. Production de Louis

$$\begin{aligned} & 5 > 4 \\ \Rightarrow \quad & 5\log\left(\frac{1}{2}\right) > 4\log\left(\frac{1}{2}\right) \\ \Rightarrow \quad & \log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^5\right) > \log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^4\right) \\ \Rightarrow \quad & \left(\frac{1}{2}\right)^5 > \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{32} > \frac{1}{16} \\ \Rightarrow \quad & 32 < 16 \end{aligned}$$

b. Production de Manon

$$\begin{aligned} & 5 > 4 \\ \Rightarrow \quad & 5\log\left(\frac{1}{2}\right) < 4\log\left(\frac{1}{2}\right) \\ \Rightarrow \quad & \log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^5\right) < \log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^4\right) \\ \Rightarrow \quad & \left(\frac{1}{2}\right)^5 < \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{10} < \frac{1}{16} \\ \Rightarrow \quad & 10 > 16 \end{aligned}$$

Exercice 34/37

En 2020, un litre d'essence coûte 1,50 . On estime que chaque année ce prix subit une inflation de 3 %. On veut savoir en quelle année, notée n, le prix dépassera 1,70 .

a. Montrer que le problème revient à résoudre l'inéquation

$$1{,}5 \times 1{,}03^{n-2020} \geq 1{,}7.$$

b. Résoudre alors cette inéquation et répondre au problème posé.

Exercice 35/37

Le coût moyen du prix d'une heure de téléphone vaut en moyenne 1,31 en 2020 chez les principaux opérateurs. Ce prix bas résulte d'une diminution des coûts de 20 % par an du fait des progrès technologiques. On souhaite savoir quelle était la dernière année, notée n, où le prix d'une heure de téléphone dépassait les 5 .

a. Montrer que le problème revient à résoudre l'inéquation

$$\frac{1{,}31}{0{,}8^{2020-n}} > 5.$$

b. Résoudre alors cette inéquation et répondre au problème posé.

Exercice 36/37

Un particulier place 1 000 en intérêts composés à un taux annuel de t %. Au bout de 7 ans, son capital s'élève à 1 407,10 .

1. a. Déterminer le taux t du placement.

   b. Quel serait le capital du client si celui-ci avait épargné une 8^e année ?

   c. Calculer le nombre d'années qu'il aurait fallu à ce particulier pour au moins doubler sa mise.

2. Déterminer si placer son argent (en intérêts composés) pendant deux ans à 7 % puis deux ans à 3 % revient au même que de le placer à 5 % pendant 4 ans.

Exercice 37/37

En 2020, un particulier achète une voiture neuve 12 000 et dépense 300 pour son entretien. On estime que, chaque année, la valeur de la voiture diminue de 20 % et que les frais d'entretien augmentent dans le même temps de 10 %. Le but du problème est de déterminer à partir de quand la voiture coûte plus cher en entretien que sa valeur marchande.

1. a. Exprimer v_n, la valeur marchande de la voiture l'année $2020 + n$.

   b. Exprimer c_n, le coût de l'entretien de la voiture l'année $2020 + n$.

2. Dire à partir de combien d'années la voiture vaut moins que la moitié de son prix d'achat.

3. Déterminer à partir de combien d'années la voiture coûte plus que 550 d'entretien.

4. Montrer que pour résoudre le problème, on est amené à résoudre l'inéquation

$$\left(\frac{1{,}1}{0{,}8}\right)^n > 40.$$

5. Répondre finalement au problème posé.