Exercices

Limites de fonctions

Exercice 1/32

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x+2018)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{x^5}+\dfrac{1}{x}-2017\right)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+1-\dfrac{1}{x}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x+2018)$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{2}{x^5}+\dfrac{1}{x}-2017\right)$
6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+1-\dfrac{1}{x}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^2+x+\dfrac{2018}{x}\right)$
8. $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{2}{x^5}+\dfrac{1}{x}-2017\right)$
9. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(2x+1-\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 2/32

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f(x)=x^2-2x+3$
2. $f(x)=x^3+x^2$
3. $f(x)=\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)+2$
4. $f(x)=\dfrac{x^2+x+3}{2x^3-3x}$
5. $f(x)=\dfrac{x^5-2x^3-6}{x^2+x+1}$
6. $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2-4}{x^6+3}$
7. $f(x)=3x^3-x^5$
8. $f(x)=\sqrt{\dfrac{4x^2+9}{x^2+x}}$
9. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^4+9x^2+1}{x^2+x}}$

Exercice 3/32

Rechercher les asymptotes horizontales (et étudier la position relative de la courbe et de l'asymptote) ou verticales que peuvent présenter les courbes représentatives des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x}$
2. $f(x)=\dfrac{3}{x^2}$
3. $f(x)=2-\dfrac{2018}{\sqrt{x}}$
4. $f(x)=\dfrac{1}{x+3}+x$
5. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$
6. $f(x)=\dfrac{3x^2+2x-4}{x^2-3x+2}$

Exercice 4/32

Étudier la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{x^2(1-\frac{3}{x})}{3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}$

Exercice 5/32

Étudier la limite en -2 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2;0\}$ par $f(x)=\dfrac{-x-1}{x^2+2x}$

Exercice 6/32

Étudier la limite en 0 de la fonction g définie sur $[-1;1]\backslash\{0\}$ par $g(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1}$

Exercice 7/32

Étudier la limite en $-\infty$ de $f(x)=\dfrac{3x-\cos(x)}{x+2}$.

Exercice 8/32

Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x)=2x-3\sin(x)$.

Exercice 9/32

Étudier la limite en $-\infty$ de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^4+6x^3+x+1$

Exercice 10/32

Étudier la limite en $+\infty$ de la fonction rationnelle $f(x)=\dfrac{4x^2-5x+8}{x-x^3}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;0;1\}$.

Exercice 11/32

Étudier la limite en -1 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;3\}$ par $f(x)=\dfrac{2x^2+16x+14}{x^2-2x-3}$

Exercice 12/32

Étudier la limite en $-\infty$ de $f(x)=(x^3+7x+5)e^x$

Exercice 13/32

Étudier la limite en $-\infty$ de $f(x)=\sqrt{4x^2+x+2}-3x$

Exercice 14/32

Étudier la limite en 2 de la fonction f définie sur $\left[\dfrac{1}{5};+\infty\right[\backslash\{2\}$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{5x-1}-3}{x-2}$.

Exercice 15/32 : Vrai/Faux

1. Si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
2. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et si f est définie sur $\mathbb{R}$, alors il existe un nombre k tel que f est croissante sur $[k;+\infty[$.
3. Si deux fonctions tendent vers 0 à l'infini, alors leur quotient tend vers 1.
4. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\times g(x)=-\infty$

5. Si $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$ alors la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à la courbe de f.
6. Si pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \leq \dfrac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
7. Si pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
8. Si pour tout $x > 0$, $1 \leq f(x) \leq x$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^2} = 0$
9. Si une fonction a pour limite 0 en $+\infty$, alors cette fonction est soit positive soit négative à partir d'un certain nombre k.
10. $\dfrac{e^x}{x}$ est une forme indéterminée en $-\infty$ et sa limite est 0 d'après le théorème des croissances comparées.

Exercice 16/32

Pour chaque question, déterminer les limites en α de la fonction f définie ci-dessous. Préciser les équations des éventuelles asymptotes de la courbe $\mathcal{C}$ représentatives de f.

1. $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x} + 2}{\frac{1}{x^2} - 1}$ en $\alpha = +\infty$ et $\alpha = -\infty$
2. $f(x) = (\sqrt{x} + 1)\left(\dfrac{2}{x^2} - 3\right)$ en $\alpha = +\infty$ et $\alpha = 0$
3. $f(x) = 3 + \dfrac{2}{1 - x}$ en $\alpha = 1^+$ et $\alpha = +\infty$
4. $f(x) = \dfrac{2e^x + 3}{1 - e^x}$ en $\alpha = -\infty$

Exercice 17/32

Pour chaque question, déterminer les limites en α de la fonction f définie ci-dessous.

1. $f(x) = \dfrac{x}{2x + 1}$ en $\alpha = -\dfrac{1}{2}$
2. $f(x) = \dfrac{-2x^3 + x + 1}{9 - x^2}$ en $\alpha = 3$
3. $f(x) = \dfrac{3 + x}{\frac{1}{x} + 1}$ en $\alpha = -1$
4. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{1 - e^x}$ en $\alpha = 0$

Exercice 18/32

Pour chaque question, déterminer les limites en α de la fonction f définie ci-dessous.

1. $f(x) = \sqrt{3x - 6}$ en $\alpha = 5$
2. $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$ en $\alpha = \pi$
3. $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $\alpha = 0$

Exercice 19/32

Déterminer les limites en $\alpha = +\infty$ de $f_1(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ et $f_2(x) = \dfrac{1 + \cos(x)}{\sqrt{x}}$

Exercice 20/32

Pour chaque question, donner un encadrement à l'aide de fonctions affines de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, puis en déduire les limites de f en $\alpha = +\infty$ et en $\alpha = -\infty$.

1. $f(x) = -x + 2 + \sin(x)$
2. $f(x) = \dfrac{3 - 2x}{3 - \cos(x)}$

Exercice 21/32

Soit $f\ :\ x \longmapsto \dfrac{2x+\cos(x)}{x+3}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$.

1. Montrer que, pour tout $x \neq 0$ et $x \neq -3$, $f(x) = \dfrac{2+\frac{\cos(x)}{x}}{1+\frac{3}{x}}$.
2. En déduire les limites de f à l'infini.

Exercice 22/32

Déterminer les limites en $\alpha = 0$ de $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

Exercice 23/32

Soit la fonction $f\ :\ x \longmapsto \dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x+1}}$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $x^2 \leq x^2+x+1 \leq (x+1)^2$ puis que $x \leq \sqrt{x^2+x+1} \leq x+1$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*_+$, $1 - \dfrac{1}{x+1} \leq f(x) \leq 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
3. En déduire la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 24/32

Pour chaque question, après avoir identifié les cas d'indétermination, déterminer les limites en $\alpha = -\infty$ et $\alpha = +\infty$ de la fonction f définie ci-dessous. Préciser les équations des éventuelles asymptotes de la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f.

1. $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^4 - 3x^3 - 2x + 7$
2. $f(x) = \dfrac{2x-3}{1-x}$
3. $f(x) = \dfrac{4x^2-1}{-3x^3-4x^2+x}$
4. $f(x) = \dfrac{x^2+x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+10\sqrt{x}+x}$

Exercice 25/32

Pour chaque question, après avoir identifié les cas d'indétermination, déterminer les limites en α de la fonction f définie ci-dessous.

1. $f(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{x^3+3x^2+2x}$ avec $\alpha = -1$
2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{4-x}$ avec $\alpha = 4$
3. $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x}+2}{\frac{1}{x^2}-1}$ avec $\alpha = 0$

Exercice 26/32

Pour chaque question, après avoir identifié le cas d'indétermination, déterminer les limites en α de la fonction f définie ci-dessous.

1. $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ en $\alpha = +\infty$
2. $f(x) = e^x - x^2 + x$ en $\alpha = +\infty$
3. $f(x) = e^x(1-x) + 1$ en $\alpha = -\infty$
4. $f(x) = \dfrac{e^x}{(x+1)^2}$ en $\alpha = +\infty$
5. $f(x) = x^2 e^{2x}$ en $\alpha = -\infty$
6. $f(x) = \dfrac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$ en $\alpha = 0$

Exercice 27/32

Étudier les limites de $f \ : \longmapsto \dfrac{\sqrt{x^2-1}+3x}{x}$ en $\alpha = -\infty$ et en $\alpha = +\infty$.

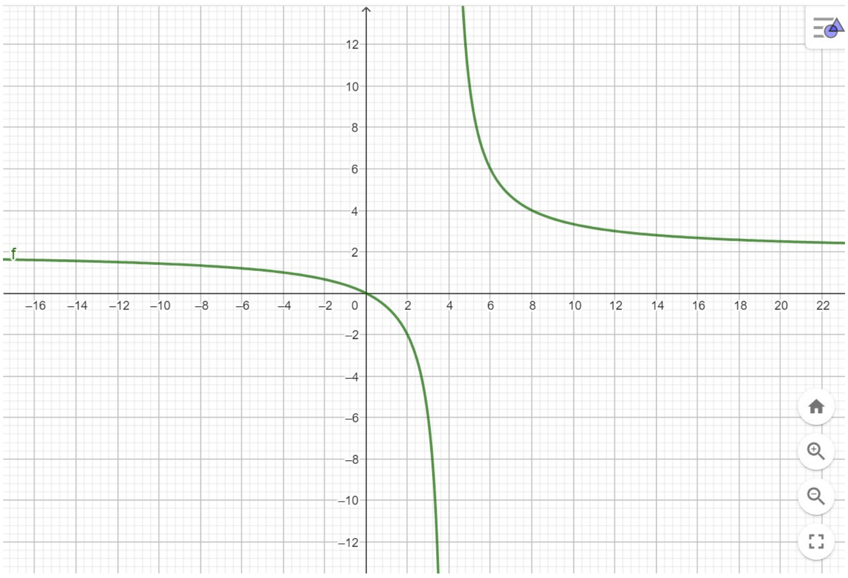
Exercice 28/32 : *

Pour chaque question, déterminer les limites en α de f définie ci-dessous.

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+5} - \sqrt{4x+1}}{x-2}$ en $\alpha = 2$
2. $f(x) = \sqrt{16x^2 + x + 2} + 4x$ en $\alpha = -\infty$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \sqrt{\dfrac{1}{x^2} - 1}$ en $\alpha = 0$

Exercice 29/32

On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_\{$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{4\}$. Déterminer par lecture graphique les limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction f. Préciser les équations des éventuelles asymptotes.



Exercice 30/32

Soit $f \ : \ x \longmapsto \dfrac{3x^2 - 5x + 1}{x+2}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $x \neq -2,\ f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$.
2. En déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote Δ dont on donnera l'équation.
3. Préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ.

Exercice 31/32 : *

Soit $f \ : \ x \longmapsto \sqrt{x^2+1}+x$ définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.
2. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
3. Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à ses asymptotes.

Exercice 32/32 : Approfondissement possible

Pour chaque question, étudier les branches infinies en $+\infty$ de f définie ci-dessous.

1. $f(x) = 3x + 5 - \dfrac{4}{e^x + 2}$
2. $f(x) = e^x + 5x + 2$
3. $f(x) = 5x + 2 + \sqrt{x}$
4. $f(x) = 7\sqrt{x} + 3$