Exercices

Injection, surjection bijection

Exercice 1/12

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Soit $A = [-1; 4]$. Déterminer :
   (a) l'image directe de A par f ;
   (b) l'image réciproque de A par f ;
2. On considère la fonction sin définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   Quelle est l'image directe par sin de $\mathbb{R}$? De $[0; 2\pi]$? De $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$?
   Quelle est l'image réciproque par sin de $[0; 1]$? De $[3; 4]$? De $[1; 2]$?

Exercice 2/12

1. Soient f et g les deux fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 3x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 1$$
   Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.
2. Dans les exemples suivants déterminer les deux fonctions u et v telles que $h = u \circ v$.
   (a) $h_1(x) = \sqrt{3x - 1}$ (b) $h_2(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (c) $h_3(x) = \frac{1}{x + 7}$

Exercice 3/12

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & -n \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

Exercice 4/12

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$
2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$
3. $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \mapsto & (x+y;x-y) \end{array}$

Exercice 5/12

L'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \mapsto & (x+y;xy) \end{array}$$

est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 6/12

Soient f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par $f(x) = 2x$ et

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si x est pair} \\ 0 & \text{si x est impair} \end{cases}$$

Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$. Les fonctions f et g sont-elles injectives ? Surjectives ? bijectives ?

Exercice 7/12

Soit

$$g : \begin{array}{ccc} [0;+\infty[& \to & [0;1[\\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+x} \end{array}$$

Démontrer que g est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 8/12

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array}$$

1. f est-elle injective ? Surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1;1]$.
3. Montrer que la restriction

   $$g : \begin{array}{ccc} [-1;1] & \to & [-1;1] \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

   est une bijection.

Exercice 9/12

Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est injective ;
2. $\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad f^{-1}(f(A)) = A$;

3. $\forall A, A' \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$;
4. $\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad f\left(C_E A\right) \subset C_F f(A)$

Exercice 10/12

Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est surjective ;
2. $\forall B \in \mathcal{P}(F) \quad f(f^{-1}(B)) = B$;
3. $\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad f\left(C_E A\right) \supset C_F f(A)$

Exercice 11/12

Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications. Démontrer que :

1. si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective ;
2. si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective ;
3. si $g \circ f$ est injective alors f est injective ;
4. si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective ;
5. si $g \circ f$ est injective et si f est surjective alors g est injective ;
6. si $g \circ f$ est surjective et si g est injective alors f est surjective ;
7. $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives si et seulement si f, g et h le sont.

Exercice 12/12

Soit $i : A \to B$ une injection. On suppose $A \neq \varnothing$.

1. Montrer qu'il existe une application $s : B \to A$ telle que $s \circ i = \mathrm{id}_A$
2. En déduire que :
   (a) pour toute application $f : A \to C$, il existe une application $g : B \to C$ telle $f = g \circ i$;
   (b) i est simplifiable à gauche, c'est-à-dire $\forall C \quad \forall h, h' : C \to A \quad (i \circ h = i \circ h' \Rightarrow h = h')$;
   (c) si $A \neq \varnothing$ et s'il existe une injection de A dans B, alors il existe une surjection de B dans A.
3. Qu'en est-il si $A = \varnothing$?
4. Montrer que réciproquement, toute application simplifiable à gauche est injective.