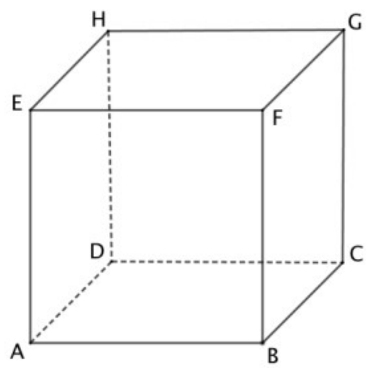
Corrigé : Exercices

Géométrie

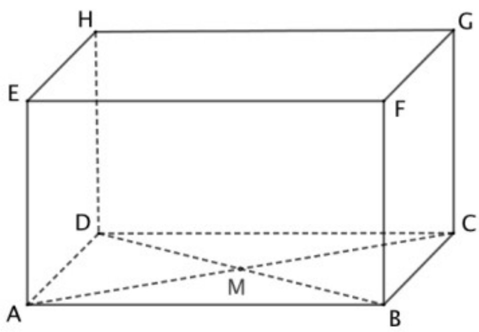
Exercice 1/27

A l'aide du cube ci-contre, représenter les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ donnés par :



- $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FH}$
- $\vec{b} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{FC}$
- $\vec{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AC}$

Dans le parallélépipède ci-dessous, M est le centre du rectangle $ABCD$.
Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MF}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.



Exercice 2/27

On considère un cube ABCDEFGH. On justifiera toutes les réponses.
Quelle sont les positions relatives :

1. Des droites (HF) et (DF) ?
2. Des droites (EC) et (AG) ?
3. Des droites (EC) et (FB) ?
4. Des droites (EG) et (AC) ?

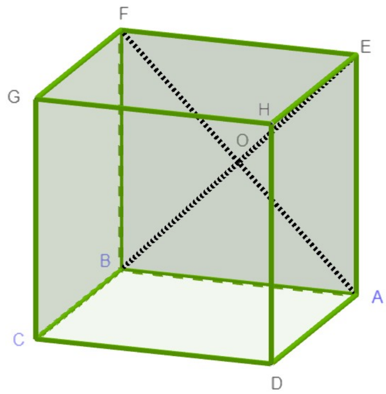
Solution :

1. (HF) et (DF) sont clairement sécante en F elles sont donc coplanaires.
2. Dans $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$:
   - $\overrightarrow{EC}(1; 1; -1)$
   - $\overrightarrow{AG}(1; 1; 1)$

   Les droites ne sont donc pas parallèles.
   Soit le plan (AEG), on a $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC}$ or $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$, d'où $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EG}$.
   Les droites (EC) et (AG) sont donc coplanaires et sécantes.
3. Dans $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$:
   $\overrightarrow{EC}(1; 1; -1)$ et $\overrightarrow{FB}(0; 0; -1)$. Les droites ne sont donc pas parallèles.
   Soit le plan (ECB) où (HCB).
   $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$.
   Or $\overrightarrow{AE}$,

Exercice 3/27

On considère le cube ci-dessous où O est le centre du carré ABFE.
Par lecture, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AO}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.
Puis placer le point M défini par
$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DH}$.



Solution :

$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE})$

Exercice 4/27

Soit ABCD un tétraèdre. Le point I est le milieu de $[CD]$ et le point k est défini par
$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.
Exprimer $\overrightarrow{BI}$ puis $\overrightarrow{BK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

Solution : Par un rapide dessin à main levée, on peut trouver la relation suivante : $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$.
Il est également possible, sans dessin, de retrouver cette égalité par la relation de Chasles :
$\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$

$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} +$

$\frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$

Exercice 5/27

ABCDEFGH est un cube et J et K les milieux respectifs de $[GH]$ et $[AD]$.
Le point M est défini par $\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{EF}$.
Exprimer les vecteurs suivants $\overrightarrow{EM}$; $\overrightarrow{HC}$; $\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{BJ}$; $\overrightarrow{KM}$ et $\overrightarrow{MJ}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Solution : Faire un dessin à main levée.

- $\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}$
- $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$
- $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$
- $\overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HJ} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Exercice 6/27

ABCDEFGH est un cube. Soit I le milieu de $[AH]$ et J le point de $[FI]$ tel que $\overrightarrow{FJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FI}$.
Démontrer que les points $E,\ J$ et C sont alignés.

Solution :
Nous allons démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires :
Pour cela, nous allons décomposer les vecteurs $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ dans la base $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

D'une part : $\overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

et d'autre part : $\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{EF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HI}) = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(-(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}) = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(-(-\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})) = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$

Exercice 7/27

Soit ABCD un tétraèdre et I le milieu de $[CD]$. M est le point tel que

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BD}$$

Démontrer que le point M appartient au plan (ABC).

Solution : Si $M \in (ABC)$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Exercice 8/27

On considère un pavé droit ABCDEFGH, J et K sont les milieux respectifs des segments $[DB]$ et $[AH]$.
Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{JG}$ sont coplanaires.

Solution : Si les vecteurs $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{JG}$ sont coplanaires, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AH} = \alpha\overrightarrow{HF} + \beta\overrightarrow{JG}$
$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{JG} + \overrightarrow{GH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{JG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{JG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{JG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{JG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{JG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{JG}$

Exercice 9/27

Soit ABCD un tétraèdre, I le milieu de $[AB]$; E et F les points définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et G le point tel que BCGD soit un parallélogramme.
Montrer que les points I, E, G et F sont coplanaires.

Solution :

- $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$.

D'où $\overrightarrow{IG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{IE} + \frac{3}{2}\overrightarrow{IF}$

Exercice 10/27

On considère le cube ABCDEFGH. Soit L le point tel que $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.
Démontrer que la droite (EL) appartient au plan (BEG).

Solution : Si (EL) appartient au plan (BEG), alors E et L doivent appartenir au plan.
E appartient au plan de manière évidente.
$\overrightarrow{EL} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AL} = -\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EG} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EB}$

Exercice 11/27

ABCDEFGH est un pavé droit, J est tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, I est le milieu de $[AF]$ et K est le milieu de $[FG]$. Démontrer que les droites (IJ) et (DK) sont parallèles.

Solution : Il suffit de montrer que $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{DK}$ sont colinéaires.
$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = -2\overrightarrow{IJ}$

Exercice 12/27

ABCDEFGH est un cube. Les points I, J et k sont les centres respectifs des faces EFGH, BFGC et ABFE.
Démontrer que les plans (IJK) et (ACH) sont parallèles.

Solution :

- I étant le centre de la face AFGH, il est le milieu de $[EG]$, donc $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{IG}$
- J étant le centre de la face BFGC, il est le milieu de $[BG]$, donc $\overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GJ}$
- On obtient alors : $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{IG} + 2\overrightarrow{GJ} = 2\overrightarrow{IJ}$
- Or $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{HC}$ donc $\overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{IJ}$.

De la même façon on obtient $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{KJ}$.
Par conséquent, les deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{HC}$ et $\overrightarrow{AC}$ du plan (ABC) sont respectivement égaux aux vecteurs $2\overrightarrow{IJ}$ et $2\overrightarrow{KJ}$ du plan (IJK).
Les plans sont donc parallèles.

Exercice 13/27

ABCDEFGH est un cube, M et L sont les points tels que : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}$.
Démontrer que la droite (ML) est parallèle au plan (DBH).

Solution : On exprime le vecteur $\overrightarrow{ML}$ en fonction de deux vecteurs directeurs du plan (DBH), par exemple les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DH}$:

- $\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}$. Or ABCDEFGH est un cube donc $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$.
  Soit $\overrightarrow{ML} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DH} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DH}$.

D, B et H n'etant pas alignés, les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DH}$ dirigent le plan (DBH), on en déduit que la droite (ML) est parallèle au plan (DBH).

Exercice 14/27 : Utilisation des coordonnées cartésiennes

On considère un pavé droit ABCDEFGH. On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

1. Démontrer que les droites (AD) et (GH) sont non coplanaires.
2. Quelle est la position relative des droites (EC) et (DF) ?

Solution :

1. Des vecteurs directeurs des droites (AD) et (GH) sont respectivement $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{GH}$.
   $\overrightarrow{AD}(0; 1; 0)$ et $\overrightarrow{GH}(-1; 0; 0)$.
   Les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.
   Si (AD) et (HG) sont coplanaires alors elles sont toute deux incluses dans le plan (ADH) qui est également (ADE).
   Or $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AB}$ qui n'appartient pas au plan (ADE).

2. Même raisonnement que ci-dessus.
   $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{DF}$ appartient au plan (DEC).

Exercice 15/27

Soit M, N et P trois points de l'espace, non alignés.
On considère les points I et J tels que : $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{NJ} = 3\overrightarrow{MP} - 2\overrightarrow{MN}$.
Montrer que P appartient à la droite (IJ).

Solution : Il s'agit de montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{IP}$
$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{PJ} = \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NJ} = \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{PN} + 3\overrightarrow{MP} - 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{MP} - 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{IP} - \overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP} = 3\overrightarrow{IP}$ (parallélogramme).

Exercice 16/27

Soit ABCD un tétraèdre. On considère les points K, L et E définis par :

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$$

1. Démontrer que $\overrightarrow{KE} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$
2. Exprimer $\overrightarrow{KL}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CD}$.
3. En déduire que les points K, L et E sont alignés.

Solution :

1. $\overrightarrow{KE} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$
2. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{KL}$ On obtient donc $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$
3. $\overrightarrow{KE} = 3\overrightarrow{KL}$

Exercice 17/27

Soit ABCDEFGH un parallélépipède et K le point de l'espace tel que :

$$\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$$

1. Démontrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AK}$
2. En déduire que les points A, K et G sont alignés.

Solution :

1. $3\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BK} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$
2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$.
   Finalement, $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AK}$

Exercice 18/27

Soit ABCDEFGH un cube.
On considère les points M et N définis par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} \text{ et } \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FG}$$

1. Construire la figure.
2. Démontrer que les points C, E et M sont alignés.
3. Démontrer que les points E, F, H et N sont coplanaires.

Solution :

1.
2. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM} \iff \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM} \iff \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{3}\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EM} \iff \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EM} \iff \frac{1}{3}\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EM}$
3. $\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{EA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$

Exercice 19/27

On considère ABCD un tétraèdre. Soit I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$. Les points E et F sont définis par : $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DE}$.

1. Exprimer $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$ en fonction de $\overrightarrow{DI}$.
2. Démontrer que $\overrightarrow{DF} - 2\overrightarrow{DI} = 3\overrightarrow{IJ}$.
3. En déduire que $\overrightarrow{DI}$, $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont coplanaires.

Solution :

1. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \iff 2\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$
2. D'une part : $\overrightarrow{DF} - 2\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{AD}$
   D'autre part : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
   Donc $3\overrightarrow{IJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FE}$.
   Or $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FE}$.
   D'où le résultat.
3. Évident $\overrightarrow{DF} - 2\overrightarrow{DI} = 3\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DJ}$

Exercice 20/27

On considère le tétraèdre ABCD. Le point I est le milieu de $[AD]$.

1. Faire une figure puis construire les points E et F tels que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BC}$.
2. Démontrer que les droites (CI) et (EF) sont parallèles.

Solution :

1.
2. Il s'agit de montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{IC}$.
   $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{IC}$

Exercice 21/27

On considère ABCDEFGH un pavé droit. I et J sont les milieux respectifs des segments $[BD]$ et $[AH]$. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{IG}$ sont coplanaires.

Solution : Il s'agit de montrer qu'il existe $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\overrightarrow{HF} = \alpha\overrightarrow{IG} + \beta\overrightarrow{AH}$.
$\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BI} = 2(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GI}) = 2(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{GI})$
Or $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{FH}$
D'où $\overrightarrow{HF} = 2\overrightarrow{IG} - 2\overrightarrow{AH}$

Exercice 22/27

On considère un tétraèdre ABCD. I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$. Les points K et L sont définis par :

$$\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

Démontrer que les points $I,\ J,\ K$ et L sont coplanaires.

Solution :

- $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$
- $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{IC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Finalement, $\overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{IL} - \frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$
$\overrightarrow{JI} = 2\overrightarrow{IK} + 2\overrightarrow{IL}$

Exercice 23/27

Soit ABCD un tétraèdre, I le milieu de $[AB]$; E et F les points définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et G le point tel que BGCD soit un parallèlogramme.

1. Faire un dessin.
2. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{IE},\ \overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{IG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. En déduire qu'il existe deux réels α et β tel que $\overrightarrow{IG} = \alpha\overrightarrow{IE} + \beta\overrightarrow{IF}$
4. En déduire que les points $I,\ E,\ G$ et F sont coplanaires.

Solution :

1.
2. - $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$
   - $\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$
   - $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$
3. $\overrightarrow{IG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{IE} + \frac{3}{2}\overrightarrow{IF}$
4. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{IE},\ \overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{IG}$ sont coplanaires.
   Les points $I,\ E,\ F$ et G sont donc coplanaires.

Exercice 24/27

ABCD est un tétraèdre. G est le centre de gravité du triangle BCD. J est le milieu de $[AC]$.
Les points I et K sont définis par : $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AK} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.
La droite (AG) coupe le plan (IJK) en L.
On s'intéresse à la position de L sur le segment $[AG]$. On pose $\overrightarrow{AL} = k\overrightarrow{AG}$ avec $k \in [0;1]$.

1. Justifier que $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})$ est un repère de l'espace.
2. En utilisant le fait que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$ sont coplanaires, obtenir une équation vérifiée par k. Conclure.

Solution :

1. ABCD est un tétraèdre, les points A, B, C et D ne sont donc pas coplanaires.
2. Dans ce repère on peut trouver les coordonnées des points : $I(\frac{1}{4};0;0)$, $J(0;\frac{1}{2};0)$, $K(0;0;\frac{2}{3})$ et $G(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3})$ $(\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD})$
   Donc $\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{2};0\right)$ et $\overrightarrow{IK}\left(-\frac{1}{4};0;\frac{2}{3}\right)$.
   Comme $\overrightarrow{AL} = k\overrightarrow{AG}$, on a $\overrightarrow{IL}\left(\frac{k}{3}-\frac{1}{4};\frac{k}{3};\frac{k}{3}\right)$.
   Or comme I, J, L et K sont coplanaires alors il existe $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{IL} = a\overrightarrow{IJ}+b\overrightarrow{IK}$.
   Une résolution de système à 3 équations et 3 inconnues nous donne : $a = \frac{4}{15}$, $b = \frac{1}{5}$ et $k = \frac{2}{5}$.

Exercice 25/27

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle. On considère les points I, J et K définis par $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{GJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

1. Démontrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{HG}$
2. Démontrer que les plans (AIJ) et (GHK) sont parallèles.

Solution :

1. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG} + \frac{3}{4}\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{HG}$.
2. On a également $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KH} + \overrightarrow{HI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{KH} + \frac{3}{4}\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{KH}$
   Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{IJ}$ dirigent le plan (AIJ) et les vecteurs $\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{KH}$ dirigent le plan (GHK), donc ces plans sont parallèles.

Exercice 26/27

Soit ABCDEFGH un cube. On considère les points I et J définis par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

1. En exprimant les vecteurs $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{IF}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, déterminer deux réels a et b tel que $\overrightarrow{IF} = a\overrightarrow{EG} + b\overrightarrow{EJ}$.
2. Que peut-on dire de la droite (IF) et du plan (EGJ) ?

Solution :

1. On a :
   - $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
   - $\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$
   - $\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BF} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$

   On a alors $\overrightarrow{IF} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{EJ}$
2. Le vecteur $\overrightarrow{IF}$, qui dirige la droite (IF), est coplanaire au vecteur $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EJ}$, qui dirigent le plan (EGJ), par conséquent la droite (IF) est parallèle au plan (EGJ).

Exercice 27/27

Soit ABCDEFGH un pavé droit. Pour tout réel t, on définit les points M et N par : $\overrightarrow{HM} = t\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{GN} = t\overrightarrow{GC}$.

1. Justifier que $(A; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AE})$ est un repère de l'espace.
2. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont coplanaires.
3. En déduire la position relative de la droite (MN) et du plan (CEF).

Solution :

1. ABCDEFGH étant un pavé droit, les points A, D, B et E ne sont pas coplanaires. Donc $(A; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AE})$ est un repère de l'espace.
2. La droite (MN) et le plan (CEF) sont :
   - soit parallèles, dans le cas où les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont coplanaires ;
   - soit sécants en un point, dans le cas contraire.

   La position relative de la droite (MN) et du plan (CEF) revient donc à étudier la coplanarité éventuelle des vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{EF}$.
   Comme $\overrightarrow{HM} = t\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{GN} = t\overrightarrow{GC}$, on a $M(1-t; 0; 1)$ et $N(1; 1; 1-t)$, d'où $\overrightarrow{MN}(t; 1; -t)$ $\overrightarrow{CF}(-1; 0; 1)$ et $\overrightarrow{EF}(0; 1; 0)$.
   On cherche donc à déterminer s'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{MN} = a\overrightarrow{CF} + b\overrightarrow{EF}$.
   Une résolution de système nous donne $a = -t$ et $b = 1$.
   D'où $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont coplanaires.
3. Par conséquent, la droite (MN) est parallèle au plan (CEF).