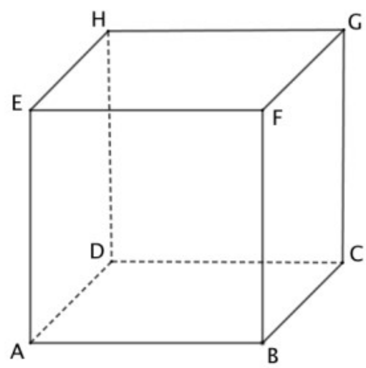
Exercices

GÉOMÉTRIE

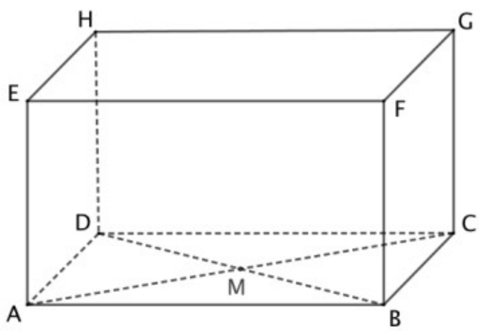
Exercice 1/27

A l'aide du cube ci-contre, représenter les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ donnés par :

- $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FH}$
- $\vec{b} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{FC}$
- $\vec{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AC}$



Dans le parallélépipède ci-dessous, M est le centre du rectangle $ABCD$.
Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MF}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.



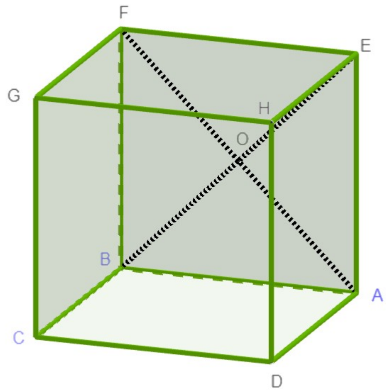
Exercice 2/27

On considère un cube ABCDEFGH. On justifiera toutes les réponses.
Quelle sont les positions relatives :

1. Des droites (HF) et (DF) ?
2. Des droites (EC) et (AG) ?
3. Des droites (EC) et (FB) ?
4. Des droites (EG) et (AC) ?

Exercice 3/27

On considère le cube ci-dessous où O est le centre du carré ABFE.
Par lecture, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AO}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.
Puis placer le point M défini par
$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DH}$.



Exercice 4/27

Soit ABCD un tétraèdre. Le point I est le milieu de $[CD]$ et le point k est défini par
$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.
Exprimer $\overrightarrow{BI}$ puis $\overrightarrow{BK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

Exercice 5/27

ABCDEFGH est un cube et J et K les milieux respectifs de $[GH]$ et $[AD]$.
Le point M est défini par $\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{EF}$.
Exprimer les vecteurs suivants $\overrightarrow{EM}$; $\overrightarrow{HC}$; $\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{BJ}$; $\overrightarrow{KM}$ et $\overrightarrow{MJ}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Exercice 6/27

ABCDEFGH est un cube. Soit I le milieu de $[AH]$ et J le point de $[FI]$ tel que $\overrightarrow{FJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FI}$.
Démontrer que les points $E,\ J$ et C sont alignés.

Exercice 7/27

Soit ABCD un tétraèdre et I le milieu de $[CD]$. M est le point tel que

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BD}$$

Démontrer que le point M appartient au plan (ABC).

Exercice 8/27

On considère un pavé droit ABCDEFGH, J et K sont les milieux respectifs des segments $[DB]$ et $[AH]$.
Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AH},\ \overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{JG}$ sont coplanaires.

Exercice 9/27

Soit ABCD un tétraèdre, I le milieu de $[AB]$; E et F les points définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et G le point tel que BCGD soit un parallélogramme.
Montrer que les points $I,\ E,\ G$ et F sont coplanaires.

Exercice 10/27

On considère le cube ABCDEFGH. Soit L le point tel que $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.
Démontrer que la droite (EL) appartient au plan (BEG).

Exercice 11/27

ABCDEFGH est un pavé droit, J est tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, I est le milieu de $[AF]$ et K est le milieu de $[FG]$. Démontrer que les droites (IJ) et (DK) sont parallèles.

Exercice 12/27

ABCDEFGH est un cube. Les points I, J et k sont les centres respectifs des faces EFGH, BFGC et ABFE.
Démontrer que les plans (IJK) et (ACH) sont parallèles.

Exercice 13/27

ABCDEFGH est un cube, M et L sont les points tels que : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}$.
Démontrer que la droite (ML) est parallèle au plan (DBH).

Exercice 14/27 : Utilisation des coordonnées cartésiennes

On considère un pavé droit ABCDEFGH. On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

1. Démontrer que les droites (AD) et (GH) sont non coplanaires.
2. Quelle est la position relative des droites (EC) et (DF) ?

Exercice 15/27

Soit M, N et P trois points de l'espace, non alignés.
On considère les points I et J tels que : $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{NJ} = 3\overrightarrow{MP} - 2\overrightarrow{MN}$.
Montrer que P appartient à la droite (IJ).

Exercice 16/27

Soit ABCD un tétraèdre. On considère les points $K,\ L$ et E définis par :

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$$

1. Démontrer que $\overrightarrow{KE} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$

2. Exprimer $\overrightarrow{KL}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CD}$.
3. En déduire que les points K, L et E sont alignés.

Exercice 17/27

Soit ABCDEFGH un parallélépipède et K le point de l'espace tel que :

$$\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$$

1. Démontrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AK}$
2. En déduire que les points A, K et G sont alignés.

Exercice 18/27

Soit ABCDEFGH un cube.
On considère les points M et N définis par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} \text{ et } \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FG}$$

1. Construire la figure.
2. Démontrer que les points C, E et M sont alignés.
3. Démontrer que les points E, F, H et N sont coplanaires.

Exercice 19/27

On considère ABCD un tétraèdre. Soit I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$.
Les points E et F sont définis par : $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DE}$.

1. Exprimer $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$ en fonction de $\overrightarrow{DI}$.
2. Démontrer que $\overrightarrow{DF} - 2\overrightarrow{DI} = 3\overrightarrow{IJ}$.
3. En déduire que $\overrightarrow{DI}$, $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont coplanaires.

Exercice 20/27

On considère le tétraèdre ABCD. Le point I est le milieu de $[AD]$.

1. Faire une figure puis construire les points E et F tels que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BC}$.
2. Démontrer que les droites (CI) et (EF) sont parallèles.

Exercice 21/27

On considère ABCDEFGH un pavé droit. I et J sont les milieux respectifs des segments $[BD]$ et $[AH]$. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{IG}$ sont coplanaires.

Exercice 22/27

On considère un tétraèdre ABCD. I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$. Les points K et L sont définis par :

$$\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

Démontrer que les points I, J, K et L sont coplanaires.

Exercice 23/27

Soit ABCD un tétraèdre, I le milieu de $[AB]$; E et F les points définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et G le point tel que BGCD soit un parallèlogramme.

1. Faire un dessin.
2. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{IE}$, $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{IG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. En déduire qu'il existe deux réels α et β tel que $\overrightarrow{IG} = \alpha\overrightarrow{IE} + \beta\overrightarrow{IF}$
4. En déduire que les points I, E, G et F sont coplanaires.

Exercice 24/27

ABCD est un tétraèdre. G est le centre de gravité du triangle BCD. J est le milieu de $[AC]$. Les points I et K sont définis par : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.
La droite (AG) coupe le plan (IJK) en L.
On s'intéresse à la position de L sur le segment $[AG]$. On pose $\overrightarrow{AL} = k\overrightarrow{AG}$ avec $k \in [0; 1]$.

1. Justifier que $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD})$ est un repère de l'espace.
2. En utilisant le fait que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$ sont coplanaires, obtenir une équation vérifiée par k. Conclure.

Exercice 25/27

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle. On considère les points I, J et K définis par $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{GJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

1. Démontrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{HG}$
2. Démontrer que les plans (AIJ) et (GHK) sont parallèles.

Exercice 26/27

Soit ABCDEFGH un cube. On considère les points I et J définis par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

1. En exprimant les vecteurs $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{IF}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, déterminer deux réels a et b tel que $\overrightarrow{IF} = a\overrightarrow{EG} + b\overrightarrow{EJ}$.
2. Que peut-on dire de la droite (IF) et du plan (EGJ) ?

Exercice 27/27

Soit ABCDEFGH un pavé droit. Pour tout réel t, on définit les points M et N par : $\overrightarrow{HM} = t\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{GN} = t\overrightarrow{GC}$.

1. Justifier que $(A; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AE})$ est un repère de l'espace.

2. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont coplanaires.
3. En déduire la position relative de la droite (MN) et du plan (CEF).