Exercices

ED

Exercice 1/24

Vérifier si les fonctions suivantes sont solutions ou non sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle suivante

1. $y' = 2y + e^x$ et $f(x) = -ex$
2. $y' + 2y = 6x + 5$ et $f(x) = 3x + 1$
3. $y' + y - x - 1 = 0$ et $f(t) = x$

Exercice 2/24

Vérifier si les fonctions suivantes sont solutions ou non sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle suivante

1. $y \times y' = x$ et $f(x) = x$
2. $y' - 2x \times y = 0$ et $f(x) = e^{-x^2}$
3. $y'' + y = 0$ et $f(t) = \cos(t)$

Exercice 3/24 : Équations homogènes

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 3y$
2. $y' = -2y$
3. $y' + 5y = 0$
4. $3y' + 6y = 0$
5. $y' - 2y = 0$
6. $5y' - 2y = 0$
7. $y = 3y'$
8. $-4y' - 12y = 0$
9. $-2y' + y = 0$
10. $y' = 0$

Exercice 4/24

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = -y$
2. $y' = \dfrac{1}{2}y$
3. $y' + y = 0$
4. $y' = 4y$
5. $3y' + y = 0$

Exercice 5/24

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 2y + 1$
2. $y' = \dfrac{1}{3}y + \dfrac{2}{3}$
3. $y' + 2y = 3$
4. $y' - 6 = 5y$
5. $y = 3y' + 6$

Exercice 6/24

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + e^{3x} = 1$
2. $y = 4y'$
3. $y - y' = 0$
4. $y' = 3y + 12$
5. $5y' - y = 10$

Exercice 7/24 : Question de cours

Vérifier si la fonction suivante est solution ou non sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle suivante $y' = 2y + e^x$ et $f(x) = -e^x$

Exercice 8/24 : Question de cours

Résoudre l'équation différentielle suivante : $-4y' - 12y = 24$

Exercice 9/24 : Problème de Cauchy

Dans chaque cas déterminer la solution f de léquation :

1. $y' = 3y$ avec $f(0) = 2$
2. $2y' = y$ avec $f(\ln(9)) = 2$
3. $2y' + y = 0$ avec $f(2) = e$

Exercice 10/24 : Problème de Cauchy

Dans chaque cas déterminer la solution f de léquation :

1. $y' + 7y = 0$ avec $f(1) = 1$
2. $y' = 0,2y - 3$ avec $f(0) = 1$

Exercice 11/24

Dans chaque cas, donner toutes les solutions, puis la solution répondant au problème de Cauchy :

1. $2y' - y = 3$ avec $y(1) = 1$
2. $y' - 6y = 8$ avec $y(0) = 1$

Exercice 12/24

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' = -3y$
2. $y' + 5y = 8$
3. $3y' - y = 2$
4. $\begin{cases} y' - y &= 1 \\ y(0) &= 0 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 2y' - 5y &= 1 \\ y(1) &= 7 \end{cases}$

Exercice 13/24

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = -y + 2$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
2. En déduire la solution f de l'équation différentielle (E) qui s'annule en 0.

Exercice 14/24

On considère l'équation différentielle (E) : $2y' + y = 0$, où y est une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).
2. Le plan est muni d'un repère.
   Déterminer la solution f de (E), dont la courbe représentative C_f dans ce repère passe par le point $A(\ln(9); 1)$.

Exercice 15/24

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle

$$(E) \ : \ y' - 2y = 3x - 1$$

.

1. Démontrer que, si f est une solution définie sur $\mathbb{R}$ de (E), alors f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est solution de $(E_0) \ : \ y' = 2y + 3$.
2. Résoudre (E_0).
3. En déduire la solution f de (E) telle que $f(0) = 5$.

Exercice 16/24 : *

L'objectif de cet exercices est de résoudre l'équation différentielle (E) :

$$5y' - 7y = x^2 + 1$$

.

1. Déterminer les réels $a,\ b,\ c$ pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de (E).
2. Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle (E_0) :

   $$5y' - 7y = 0$$

   .
3. Résoudre (E_0).
4. En déduire les solutions de (E).

Exercice 17/24

Partie A :
On considère la fonction w définie pour tous réels positifs t par :

$$w(t) = 4e^{-200t} + 146$$

1. Calculer $w(0)$
2. Déterminer la limite de la fonction w lorsque t tend vers $+\infty$.
3. Étudier le sens de variation de w sur $[0; +\infty[$.

Partie B :
On étudie l'évolution de la vitesse d'un moteur dont la vitesse de rotation à vide est de 150

rad/s. Durant l'embrayage, la vitesse de rotation du moteur, exprimée en rad/sec, est modélisée par une fonction solution de l'équation différentielle :

$$(E) : \frac{1}{200}y' + y = 146$$

où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle t positive, exprimée en secondes.

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. Vérifier que la fonction w étudiée dans la partie A est la fonction solution de (E) vérifiant la condition initiale $w(0) = 150$.
3. Interpréter la limite de $w(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$, ainsi que le sens de variation déterminé dans la partie A.
4. On considère que la vitesse de rotation du moteur est stabilisée lorsque la quantité $\dfrac{w(t) - 146}{146}$ est inférieur à 0,01. Calculer le temps mis par le moteur pour stabiliser sa vitesse. On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie au millième de seconde.

Exercice 18/24

Le taux de décroissance radioactive, proportionnel au nombre de noyaux radioactifs N donné, pour tout $t \geq 0$, par l'expression :

$$\frac{dN}{dt}(t) = -\lambda N(t), \text{ soit } N'(t) = -\lambda N(t)$$

où λ est la constante radioactive positive et t est exprimé en années.

1. Exprimer le nombre $N(t)$ de noyaux radioactifs présents à l'instant t sachant que $N(0) = N_0$.
2. La période de demi-vie T représente le temps au bout duquel la moitié des noyaux radioactifs présents se sont désintégrés.
   Exprimer T en fonction de λ.
3. **Application numérique : datation au carbone 14**
   (a) La période du carbone 14 est de 5568 ans.
   Que vaut la constante radioactive λ ?
   (b) On a trouvé en 2006 dans un site archéologique des ossements humains dont la teneur en carbone 14 est égal à 35% de celle des os d'un être humain en vie.
   Déterminer la date de la mort de cet humain.

Exercice 19/24

Un circuit RL comprend en série un générateur de tension constante E, une bobine d'inductance L et une résistance R.
L'intensité du courant électrique i dans le circuit RL est fonction du temps t, exprimé en seconde, et solution de l'équation différentielle :

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(E - Ri)$$

où R, E et L sont des constantes strictement positives.

1. Déterminer la solution i de cette équation différentielle sachant que :
$$i(0) = 0$$
2. Étudier les variations de i.

Exercice 20/24

On lâche une bille dans un puits à sec de 15 mètres à l'instant initial 0.
On note t_0 l'instant où la bille atteint le fond du puits.
On néglige les frottements de l'air.
On choisit un repère $(O; \overrightarrow{j})$, où O est le fond du puits et $\overrightarrow{j}$ un vecteur dirigé vers le haut.
D'après le principe fondamental de la dynamique, la trajectoire y est solution de $y''(t) = -g$, où g est l'unité de l'accélération de la pesanteur ($g = 9,81\ m.s^{-1}$ sur terre).

1. Calculer, pour tout $t \in [0; t_0]$, la vitesse $v(t)$ et la trajectoire $y(t)$.
2. Calculer t_0 à 10^{-2} près.

Exercice 21/24

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle (E) :

$$3y' - 2y = 13\cos(x)$$

.

1. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3\sin(x) - 2\cos(x)$ est une solution particulière de (E).
2. Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle (E_0) :

$$3y' - 2y = 0$$

3. En déduire les solutions de (E).

Exercice 22/24

Partie A : résolution d'une équation différentielle

L'objectif de cette partie est de trouver toutes les solutions strictement positives de l'équation différentielle $(1)\ :\ y' = ay - by^2$ où $a,\ b$ sont des constantes strictement positives.

1. Démontrer qu'une fonction f strictement positive est solution de (1) si, et seulement si, $g = \dfrac{1}{f}$ est strictement positive et solution de l'équation différentielle $(2)\ :\ y' = -ay - b$.
2. Résoudre l'équation différentielle (2).
3. En déduire que les solutions de l'équation différentielle (1) sont les fonctions
$f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{Ce^{-ax} + \dfrac{b}{a}}$ avec $C \geq 0$

Partie B : Évolution d'une population de bactéries

1. Au cours d'une expérience, on étudie la taille $N(t)$ d'une population de bactéries à l'instant t (t est exprimé en minutes). On remarque que l'évolution de la taille N est solution de l'équation différentielle :

$$N'(t) = 0,04N(t) \text{ avec } t \geq 0$$

   (a) Sachant que $N(0) = 100$, donner l'expression de $N(t)$ en fonction de t.
   (b) Combien d'individus (arrondi à 1 près) compte cette population au bout d'une minute ?
   (c) Quelle est la limite de $N(t)$ quand t tend vers $+\infty$?

2. Le nombre de bactérie ne peut croître indéfiniment. En pratique, le nombre est limité à un maximum M qui dépend des conditions expérimentales (volume du milieu, concentration en éléments nutritifs,...)
   L'évolution du nombre N de bactéries sur une longue période est solution en fait de l'équation différentielle (F) :
   $$N' = 0,04N \times \frac{M-N}{M} \text{ et } N(0) = 100$$
   Ici, on choisit $M = 10^6$
   (a) A l'aide de la partie A, déterminer la solution N de l'équation différentielle (F).
   (b) Étudier les variations de la fonction N.
   (c) Au bout de combien de temps le nombre de bactéries atteint-il la moitié du maximum M (arrondir le résultat à la minute) ?

Exercice 23/24

L'exercice est constitué de deux parties indépendantes.

Partie I

On considère l'équation différentielle
$$(E) \ : \ y' + y = e^{-x}$$

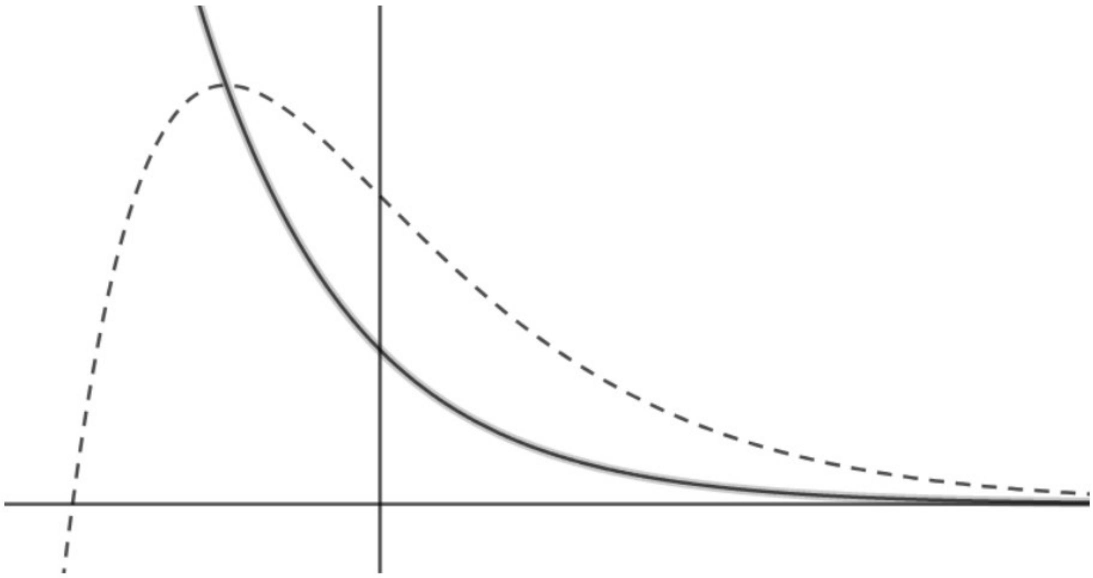
1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{-x}$.
   Vérifier que la fonction u est une solution de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'"équation différentielle $(E') \ : \ y' + y = 0$
   Résoudre l'équation différentielle (E') sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire toutes les solutions de léquation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Partie II

Dans cette partie, k est un nombre réel fixé que l'on cherche à déterminer.
On considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f_k(x) = (x+k)e^{-x}$$
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$h(x) = e^{-x}$$
On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction h.
On a représenté sur le graphique en annexe les courbes $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}$ sans indiquer les unités sur les axes ni le nom des courbes

1. Sur le graphique en annexe à rendre avec la copie, l'une des courbes est en traits pointillés, l'autre est en trait plein. Laquelle est la courbe $\mathcal{C}$?
2. En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k et placer sur l'annexe à rendre avec la copie l'unité sur chacun des axes du graphique.

Annexe



Exercice 24/24

Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à une température de 225°C. On s'intéresse à l'évolution de la température d'une baguette après sa sortie du four.

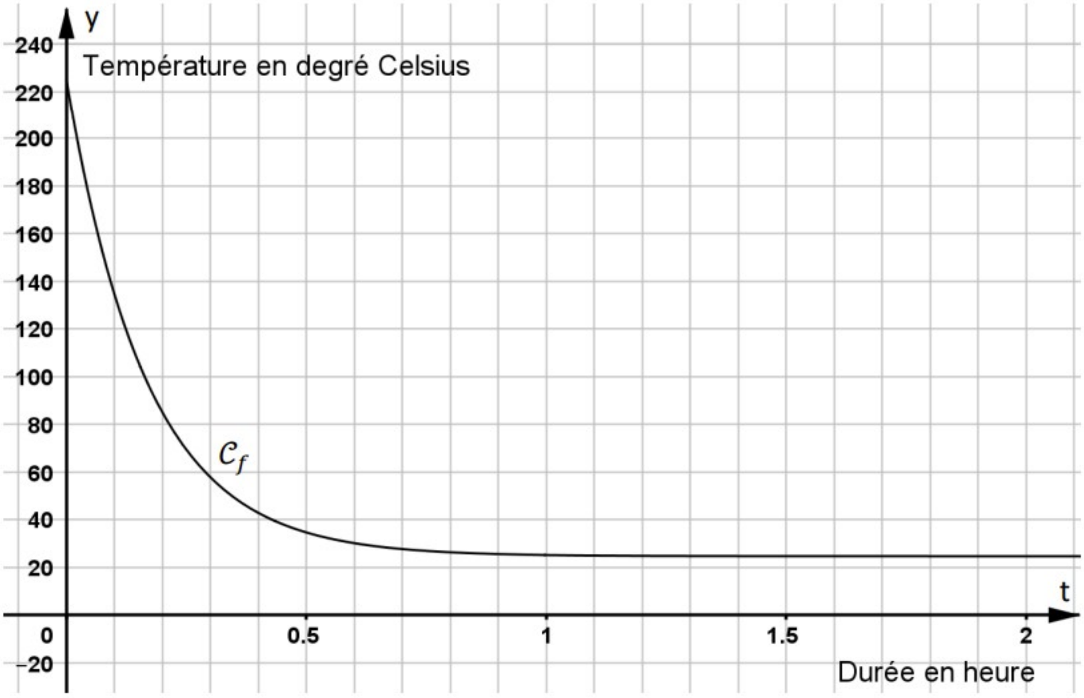
On admet qu'on peut modéliser cette évolution à l'aide d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Dans cette modélisation, $f(t)$ représente la température en degré Celsius de la baguette au bout de la durée t, exprimée en heure, après la sortie du four. Ainsi, $f(0,5)$ représente la température dune baguette une demi-heure après la sortie du four.

Dans tout l'exercice, la température ambiante de la boulangerie est maintenue à 25°C.
On admet alors que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.

1. (a) Préciser la valeur de $f(0)$.
   (b) Résoudre l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.
   (c) En déduire que pour tout réel $t \geq 0$, on a $f(t) = 200e^{-6t} + 25$.
2. Par expérience, on observe que la température d'une baguette sortant du four :
   - décroît ;
   - tend à se stabiliser à la température ambiante.

   La fonction f fournit-elle un modèle en accord avec ces observations ?
3. Montrer que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution dans $[0; +\infty[$.

   Pour mettre les baguettes en rayon, le boulanger attend que leur température soit inférieure ou égale à 40°C. On note T_0 le temps d'attente minimal entre la sortie du four d'une baguette et sa mise en rayon.
   On donne en page suivante la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal.
4. Avec la précision permise par le graphique, lire T_0. On donnera une valeur approchée de T_0 sous forme d'un nombre entier de minutes.



5. On s'intéresse ici à la diminution, minute après minute, de la température d'une baguette à sa sortie du four.
   Ainsi pour un entier naturel n, D_n désigne la diminution de température en degré Celsius d'une baguette entre la n-ième et la $(n+1)$-ième minute après sa sortie du four.
   On admet que, pour tout entier naturel n :

$$D_n = f\left(\frac{n}{60}\right) - f\left(\frac{n+1}{60}\right)$$

   (a) Vérifier que 19 est une valeur approchée de D_0 à 0,1 près, et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

   (b) Vérifier que l'on a, pour tout entier naturel n : $D_n = 200e^{-0,1n}(1 - e^{-0,1})$.
   En déduire le sens de variation de la suite (D_n), puis la limite de la suite (D_n).
   Ce résultat était-il prévisible dans le contexte de lexercice ?